国家自然科学基金项目　博士点基金项目

模型论导引

沈复兴　著



北京师范大学出版社

国家自然科学基金项目　博士点基金项目

模　型　论　导　引

沈复兴　著

北 京 师 范 大 学 出 版 社

责任编辑 潘淑琴

图书在版编目（CIP）数据

模型论导引/沈复兴著．-北京：北京师范大学出版社，1995.6
ISBN 7-303-03941-4

Ⅰ.模… Ⅱ.沈… Ⅲ.模型论 Ⅳ.O141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（95）第 08671 号

北京师范大学出版社出版发行
（100875 北京新街口外大街 19 号）
北京怀柔桥中印刷厂印刷 全国新华书店经销
开本：850×1168 1/32 印张：9.25 字数：225 千
1995 年 10 月北京第 1 版 1995 年 10 月北京第 1 次印刷
印数：1—1000 册
定价：9.50 元

序

模型论是数理逻辑的主要分支学科之一，是研究形式语言及其解释（模型）之间的关系的理论。模型论与数理逻辑的其他主要分支学科如证明论、递归论、公理集合论等都有密切联系和相互渗透，并且在经典数学中有着独特的应用。（它为数学论证提供了超出一般常规的新方法，可以用来证明不少难以用常规方法证明的定理，并因而形成了模型论代数、非标准分析等新方向。）此外，模型论在计算机科学中也正在日益受到重视。

模型论是一个新兴的学科。它从本世纪50年代起才开始得到系统的发展，并开始在经典数学中陆续得到种种应用。现在，模型论已发展成为一个根深叶茂的重要学科。在我国，在这方面的研究以及在高等学校中开设模型论课程则是最近十多年才开始的。

沈复兴同志曾在北京大学哲学系及北京师范大学数学系多次为研究生讲授模型论课程。本书是他在自己讲稿的基础上，经过系统的整理及补充而写成的。其内容丰富，取舍恰当。在讲法上，既综合了前人著作中不少优点，又根据我国实际及自己的经验作了具体处理，讲解细致，并配有很多例题及习题。它是一本很好的研究生教材，并且可供数学、逻辑及计算机科学工作者参考。

我国的社会主义建设事业正在发展。在我国科学技术现代化建设的过程中，数理逻辑基础理论及计算机科学技术有着广阔的发展及应用前景，而这些方面专门人材的培养则是关键的一环。我相信，本书的出版将在这方面起到它所应有的促进作用。

王世强

1994年12月6日于北京师范大学

前　言

本书是模型论的一本入门书，可以作为数理逻辑、哲学、数学、计算机科学等方面本科生、研究生的教材或参考书。本书第一章和第二章是为初学者容易阅读而加入的引子，最后一章是介绍非古典逻辑模型论的一点补充。本书主要内容是介绍可数语言一阶逻辑模型论的基础知识。模型论研究形式语言及其解释（模型）之间的关系，是形式语言的语法和语义的关系的理论。模型论的主要方法是构造模型，除了紧致性定理、L—S—T 定理、初等链定理、省略型定理等构造模型的重要定理之外，本书着重介绍构造模型的常量方法、图象方法、超积方法、Lindenbaum 方法、Skolem 函数方法、不可辨元集方法、力迫方法，以及无穷长语言中的和谐性质方法。本书第三、四、五、六、七、十、十一章是一阶模型论的基本理论，第八、九、十二章是构造模型的几个方法。

为了适应更多的读者的需要，本书尽量少涉及专门的数学内容，举例也力求简明，本书也不涉及无穷基数的运算，而把语言、理论和模型尽量限制在可数的范围之内，因此读者只要具备命题演算、谓词演算和朴素集合论的一些初步知识就可以顺利阅读本书。

本书是受北京大学王宪钧教授之命，受晏成书教授鼓励，在王世强教授指导下写成的。许多教师、研究生阅读过本书，刘壮虎、王捍贫、周北海、邢滔滔、张玉平、田启家等同志提出过不少修改意见，北大宋文坚同志为本书的出版费了许多心血，刘书斌、宋挈、程艺华同志帮助抄写书稿，作者在此表示衷心的感谢。

本书原为王宪钧先生主编的数理逻辑丛书之一。书未出齐，王

宪钧先生和晏成书先生不幸仙逝，本人也以中年之身，突发脑干梗塞，几乎不起，丛书的出版遇到了困难。所幸北京师范大学出版社大力支持中青年教师出版专著和教材，将本书列为特急出版，本人也经天坛医院医治好转，得以在医院作校对，使本书尽快与读者见面，告慰王宪钧先生和晏成书先生的英灵。作者对北京师范大学出版社，对出版社编辑同志的工作，对天坛医院的医护人员，表示深切的敬意和衷心的感谢。由于本人水平的限制，书中存在不少缺点和错误，请读者批评指正。

作者

目　录

第一章　命题逻辑模型论

§1.1　命题逻辑形式系统

命题逻辑的一个**形式系统**是由命题变元符号，逻辑符号，由这些符号形成公式（也叫良构式，合式公式等）的规则，由若干公式组成的公理，由公理经一定的推演法则得到的定理所组成。以 L 记我们所选用的命题逻辑形式系统，L 的符号有下列三种：

(1) **命题变元符号**：P_1，P_2，P_3，……；

(2) **逻辑连接符号**：$\neg$，$\to$；

(3) **技术符号**（括号）：)，(。

L 的命题变元符号有可数多个，每个命题变元符号代表任意一个可以回答是或非的命题。L 的符号组成符号串，满足如下条件的有限符号串称为 L 的**公式**：

(1) 单个命题变元是公式；

(2) 如果 α，β 是公式，则 $(\neg\alpha)$，$(\alpha\to\beta)$ 也是公式。

公式的这种定义是归纳定义或递归定义，比如，P_1，P_2 是公式，因此 $(\neg P_1)$，$(P_1\to P_2)$ 是公式，进而 $((\neg P_1)\to(P_1\to P_2))$，$(P_2\to(((\neg P_1)\to(P_1\to P_2))\to P_1))$ 等等也是公式。注意 α，β 不是形式系统 L 中的符号，我们只是用 α，β，γ 等来表示 L 中的任意公式。如果称 L 中的符号为 L 的语言，则 L 中形成公式的规则等叫语法。我们用来说明 L 所用的语言叫元语言，比如上述 α，β，γ 等是元语言的符号，对熟悉数理逻辑的读者，这些是不会混淆的，而对初学者，则要多加留心。

我们已经规定任何一个公式中所含有的符号最多只能有限多个，我们称公式最多只能有限长。公式中所含的联接符号也叫联

结词，最多也只能有限多个。一个公式中所含的联结词越多，公式就越复杂。我们常把公式中联结词的个数称为公式的复杂程度，简称复杂度或复杂性。

命题演算中常用的联结词$\wedge$，$\vee$，$\leftrightarrow$，在L中不出现。这是因为$\{\neg, \rightarrow\}$已经构成联结词的完全集，我们可以用$\neg$，$\rightarrow$来定义$\wedge$，$\vee$和$\leftrightarrow$，设α，β是L的公式，则$(\alpha\wedge\beta)$定义为$(\neg(\alpha\rightarrow\neg\beta))$的简写，$(\alpha\vee\beta)$定义为$((\neg\alpha)\rightarrow\beta)$的简写，$(\alpha\leftrightarrow\beta)$定义为$((\alpha\rightarrow\beta)\wedge(\beta\rightarrow\alpha))$的简写。

为了使公式的写法稍微简单又不致引起歧义，我们有时省略公式最外层的括号，并约定$\alpha\rightarrow\beta\rightarrow\gamma$是公式$(\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\gamma))$的简写，$\neg\alpha\rightarrow\beta$是$((\neg\alpha)\rightarrow\beta)$的简写。同时出现所有联结词的命题公式中，我们约定优先顺序为$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$。依这个顺序联结的括号都可以省略，不依这个顺序联结的括号就不能省略。例如：$((\alpha\wedge(\neg\beta))\vee((\neg\alpha)\wedge\beta))$可以简写为$\alpha\wedge\neg\beta\vee\neg\alpha\wedge\beta$.

我们约定形式系统L中只有可数多个命题变元符号P_1，P_2，…，P_n，…，$n<\omega$. 因此，L中至多有可数多个有限长的符号串，这样L中至多只有可数多个公式。由于每个P_i都是L的公式，L的公式至少有可数多个，因此，L中有而且只有可数多个公式。

L中有三种**公理**：

$Ax1 \quad \vdash \alpha\rightarrow\beta\rightarrow\alpha$

$Ax2 \quad \vdash(\alpha\rightarrow\beta\rightarrow\gamma)\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow\alpha\rightarrow\gamma$

$Ax3 \quad \vdash(\neg\alpha\rightarrow\neg\beta)\rightarrow\beta\rightarrow\alpha$

当α，β，γ取任何一个公式时$Ax1$，2，3都是公理。因此L的每种公理都代表无限多条公理，我们称之为L的一个**公理模式**。这样L有三种公理模式。易见L的每个公理都是L的公式，而L的一个公式不一定是一个公理。例如公式$P_1\rightarrow P_2\rightarrow P_1$是公理，但公式$P_1$则不是公理。

L的**推演规则**只有一条称为**分离法则**，记作MP：从公式α，

$\alpha\to\beta$得到 β.

L 的一个**证明**或者**推演**是指有限多个公式组成的一个序列 α_1，α_2，…，α_n. 对每个 $k\leqslant n$，α_k 或是一条公理，或者是由 α_i，α_j，i，$j<k$,经分离法则 MP 得到。

L 的一个公式 α 称为 L 的一个**定理**，如果存在 L 的一个证明 α_1，α_2，…，α_n，使 $\alpha_n=\alpha$，即 α_n 就是公式 α，就称 α 是 L 的一个定理，记作$\vdash\alpha$. 易见 L 的每一条公理都是 L 的定理。

例 1 设 α 是 L 的一个公式，则 $\alpha\to\alpha$ 是 L 的一个定理，即 $\vdash\alpha\to\alpha$. 我们给出证明。

证明 (1) $\vdash\alpha\to(\alpha\to\alpha)\to\alpha$ $\quad Ax1$

(2) $\vdash(\alpha\to(\alpha\to\alpha)\to\alpha)\to(\alpha\to\alpha\to\alpha)\to\alpha\to\alpha$ $\quad Ax2$

(3) $\vdash(\alpha\to\alpha\to\alpha)\to\alpha\to\alpha$ $\quad$ (1)，(2) $\quad MP$

(4) $\vdash\alpha\to\alpha\to\alpha$ $\quad Ax1$

(5) $\vdash\alpha\to\alpha$ $\quad$ (3)，(4) $\quad MP$ ▌

设 α_1,…,α_n 是 L 的一个证明或推演，则对任意 $k\leqslant n$，α_1，…，α_k 也是 L 的一个证明或推演，这样对每个 $k\leqslant n$，α_k 都是 L 的一个定理，因此可以写成$\vdash\alpha_1$，$\vdash\alpha_2$，…，$\vdash\alpha_n$.

例 2 设 α，β 是 L 的任何二个公式，则 $\vdash\neg\alpha\to\alpha\to\beta$

证明 (1) $\vdash\neg\alpha\to\neg\beta\to\neg\alpha$ $\quad Ax1$

(2) $\vdash(\neg\beta\to\neg\alpha)\to\alpha\to\beta$ $\quad Ax2$

(3) $\vdash((\neg\beta\to\neg\alpha)\to\alpha\to\beta)\to\neg\alpha\to(\neg\beta\to\neg\alpha)\to\alpha\to\beta$ $\quad Ax1$

(4) $\vdash(\neg\alpha\to(\neg\beta\to\neg\alpha)\to\alpha\to\beta$ $\quad$ (2)，(3) $\quad MP$

(5) $\vdash(\neg\alpha\to(\neg\beta\to\neg\alpha)\to\alpha\to\beta)\to(\neg\alpha\to\neg\beta\to\neg\alpha)\to\neg\alpha\to\alpha\to\beta$ $\quad Ax2$

(6) $\vdash(\neg\alpha\to\neg\beta\to\neg\alpha)\to(\neg\alpha\to\alpha\to\beta)$ $\quad$ (4)，(5) $\quad MP$

(7) $\vdash\neg\alpha\to\alpha\to\beta$ $\quad$ (1)，(6) $\quad MP$ ▌

设 α_1，α_2，…，α_n 是 L 的有限多个公式的一个序列，如果对每个 $k\leqslant n$，α_k 或是公理，或是定理，或是由 α_i，α_j，i、$j<k$，经

分离法则得到，则 α_n 一定是 L 的一个定理。实际上，只要把是定理的 α_k 的证明补充进这个序列就可以得到适合定义的一个完全的证明。由于公理中的 α，β，γ 可以是 L 中任意公式，我们已经证明的定理中的 α，β，γ 等也可以是 L 中任意公式。

例 3 设 α 是 L 的任何一个公式，则 $\vdash\neg\neg\alpha\to\alpha$

证明 (1) $\vdash\neg\neg\alpha\to\neg\alpha\to\neg\neg\neg\alpha$ 例 2

(2) $\vdash(\neg\alpha\to\neg\neg\neg\alpha)\to\neg\neg\alpha\to\alpha$ $Ax3$

(3) $\vdash((\neg\alpha\to\neg\neg\neg\alpha)\to\neg\neg\alpha\to\alpha)\to\neg\neg\alpha\to(\neg\alpha\to\neg\neg\neg\alpha)\to\neg\neg\alpha\to\alpha$ $Ax1$

(4) $\vdash\neg\neg\alpha\to(\neg\alpha\to\neg\neg\neg\alpha)\to\neg\neg\alpha\to\alpha$ (2),(3) MP

(5) $\vdash(\neg\neg\alpha\to(\neg\alpha\to\neg\neg\neg\alpha)\to\neg\neg\alpha\to\alpha)\to(\neg\neg\alpha\to\neg\alpha\to\neg\neg\neg\alpha)\to\neg\neg\alpha\to\neg\neg\alpha\to\alpha$ $Ax2$

(6) $\vdash(\neg\neg\alpha\to\neg\alpha\to\neg\neg\neg\alpha)\to\neg\neg\alpha\to\neg\neg\alpha\to\alpha$ (4)，(5) MP

(7) $\vdash\neg\neg\alpha\to\neg\neg\alpha\to\alpha$ (1)，(6) MP

(8) $\vdash(\neg\neg\alpha\to\neg\neg\alpha\to\alpha)\to(\neg\neg\alpha\to\neg\neg\alpha)\to\neg\neg\alpha\to\alpha$ $Ax2$

(9) $\vdash(\neg\neg\alpha\to\neg\neg\alpha)\to\neg\neg\alpha\to\alpha$ (7)，(8) MP

(10) $\vdash\neg\neg\alpha\to\neg\neg\alpha$ 例 1

(11) $\vdash\neg\neg\alpha\to\alpha$ (10)，(9) MP ▌

设 Γ 是 L 的一个公式集，α_1，α_2，$\cdots\alpha_n$ 是 L 的有限多个公式的序列，称这个序列是**从 Γ 出发的一个证明**，如果对每个 α_k，$k\leqslant n$，α_k 或是 L 的一个公理，或是 Γ 中的一个公式，或是从 α_i，α_j，i、$j<k$，由 MP 得到，如果 α_1，$\cdots$，α_n 是从 Γ 出发的一个证明，就称 α_n 是 **Γ 的一个推论**，记作 $\Gamma\vdash\alpha_n$.

如果 Γ 是有限公式集 $\{\beta_1,\cdots,\beta_k\}$，$\Gamma\vdash\alpha$ 也可写成 $\beta_1,\cdots,\beta_k\vdash\alpha$. 公式集 $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\beta$，也常简写为 $\Gamma,\alpha\vdash\beta$ 等等。

例 4 $\alpha,\beta\to\alpha\to\gamma\vdash\beta\to\gamma$

证明 (1) $\alpha\to\beta\to\alpha$ $Ax1$

(2) α Γ

(3) $\beta\to\alpha$ (1), (2) MP

(4) $(\beta\to\alpha\to\gamma)\to(\beta\to\alpha)\to\beta\to\gamma$ $Ax2$

(5) $\beta\to\alpha\to\gamma$ Γ

(6) $(\beta\to\alpha)\to\beta\to\gamma$ (4), (5) MP

(7) $\beta\to\gamma$ (3), (6) MP ▌

注意，在例 4 的证明中，公式 (1) 到 (7) 的前面，我们都没有加上符号"$\vdash$"，这是因为这个公式序列中的公式并不都是 L 的定理。例如公式 (3) 和公式 (5) 是 Γ 中的公式，而 Γ 中的公式不一定是 L 的定理。这样 Γ 的推论也不一定是 L 的定理。这是由 Γ 出发的证明与由公理出发的证明的区别。当然，Γ 是空集时，Γ 的推论也就成了 L 的定理了。

命题 1.1.1 设 Γ 是 L 的一个公式集，α,β 是 L 的两个公式。

(1) 如果 $\alpha\in\Gamma$，则 $\Gamma\vdash\alpha$；

(2) 如果 $\Gamma\vdash\alpha$，$\Gamma\vdash\alpha\to\beta$，则 $\Gamma\vdash\beta$。

证明 (1) 由从 Γ 出发的证明的定义，α 自身就是一个证明，所以有 $\Gamma\vdash\alpha$。

(2) 由定义及 $\Gamma\vdash\alpha$，$\Gamma\vdash\alpha\to\beta$ 知存在从 Γ 出发的两个证明：

α_1，α_2，…，$\alpha_m=\alpha$

β_1，β_2，…，$\beta_n=\alpha\to\beta$

把这两个序列合到一起，再对 α，$\alpha\to\beta$ 用分离法则得到 β，易见序列

α_1，…，α_n，β_1，…，β_n，β

是从 Γ 出发的一个证明。因此有 $\Gamma\vdash\beta$. ▌

这里"命题 1.1.1"是形式系统 L 之外的一个定理，它说明 L 的性质，而不是 L 内部的形式定理，我们称之为元命题、元定理。一般说来它们不会和 L 内的命题、定理等概念混淆，但读者必须

注意它们之间的区别。

从公理出发到 L 的一个定理的证明有时不容易构造。例 2、例 3 就已经相当"冗长"。下面的"演绎定理"可以使这种得到 L 的一个定理的过程大大简化。

定理 1.1.2 （**演绎定理**）设 Γ 是 L 的一个公式集，α，β 是 L 的公式，若 Γ，$\alpha \vdash \beta$，则 $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$。

证明 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n = \beta$ 是从 $\Gamma \cup \{\alpha\}$ 出发到 β 的一个证明，则对任何 $k \leqslant n$，α_k 或是某一公理，或是 Γ 中一个公式，或是公式 α，或是由 α_i，α_j，i、$j<k$，经 MP 得到。现在对 $k=1, \cdots, n$ 归纳证明可以构造从 Γ 出发到 $\alpha \to \alpha_k$ 的证明。

当 $k=1$ 时，证 $\Gamma \vdash \alpha \to \alpha_1$

1.1　若 α_1 是某一公理，可以如下填补：

(1) α_1　　　Ax

(2) $\alpha_1 \to \alpha \to \alpha_1$　　　$Ax1$

(3) $\alpha \to \alpha_1$　　　(1)，(2) MP

1.2　若 α_1 是 Γ 中某一公式，仿 1.1 填补，只要把 (1) 的理由 Ax 换成 Γ。

1.3　若 α_1 是公式 α，依例 1 的证明填补可得。

归纳假设对 $\alpha \to \alpha_1$，$\alpha \to \alpha_2$，$\cdots$，$\alpha \to \alpha_{k-1}$ 都已进行适当填补使之成为从 Γ 推出的证明。

现在证明可以对 $\alpha \to \alpha_k$ 填补，使 $\Gamma \vdash \alpha \to \alpha_k$

2.1　设 α_k 是某一公理，仿 1.1 填补。

2.2　设 $\alpha_k \in \Gamma$，仿 1.2 填补。

2.3　设 α_k 是公式 α，仿 1.3 填补。

2.4　设 α_k 是由 α_i，α_j，i、$j<k$，经分离法则 MP 得到，这时或 $\alpha_i = \alpha_j \to \alpha_k$，或 $\alpha_j = \alpha_i \to \alpha_k$。不妨设 $\alpha_j = \alpha_i \to \alpha_k$，由归纳假设

…

(1′) $\alpha \to \alpha_i$

…

(2′) $\alpha\to(\alpha_i\to\alpha_k)$

均已填补，这里 $\alpha\to(\alpha_i\to\alpha_k)$ 即 $\alpha\to\alpha_j$，我们继续填补

(3′) $(\alpha\to(\alpha_i\to\alpha_k))\to(\alpha\to\alpha_i)\to\alpha\to\alpha_k$　$Ax2$

(4′) $(\alpha\to\alpha_i)\to\alpha\to\alpha_k$　(2′)，(3′)　MP

(5′) $\alpha\to\alpha_k$　(1′)，(4′) MP

这样就完成了归纳证明。当 $k=n$ 时，就构成了从 Γ 出发到 $\alpha\to\beta$的一个证明，因此 $\Gamma\vdash\alpha\to\beta$. ▌

当 $\Gamma=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 是 L 的有限公式集时，反复应用演绎定理就得到如下推论：

推论 1.1.3　设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n\vdash\alpha$，则$\vdash\alpha_1\to\cdots\to\alpha_n\to\alpha$.

例 4 中我们已经证明 $\alpha, \beta\to\alpha\to\gamma\vdash\beta\to\gamma$，由演绎定理的推论就得到$\vdash\alpha\to(\beta\to\alpha\to\gamma)\to\beta\to\gamma$。

例 5　$\vdash(\alpha\to\beta)\to(\beta\to\gamma)\to\alpha\to\gamma$

证明　由演绎定理，我们只要证明

$\alpha\to\beta,\ \beta\to\gamma,\ \alpha\vdash\gamma$

容易构造如下的证明：

(1) $\alpha\to\beta$　Γ

(2) α　Γ

(3) β　(1)，(2) MP

(4) $\beta\to\gamma$　Γ

(5) γ　(3)，(4) MP

这样我们有 $\alpha\to\beta,\ \beta\to\gamma,\ \alpha\vdash\gamma$，由推论 1.1.2 知有

$\vdash(\alpha\to\beta)\to(\beta\to\gamma)\to\alpha\to\gamma$. ▌

例 5 使我们看到演绎定理大大简化了形式系统 L 中定理的证明过程。请读者试给出例 5 的从公理出发的直接证明，并加以比较。由例 5 我们还可以得到**“假言三段论式”**，这个证明形式常被记作 ***HS***。也可以作为简化形式定理证明的一种补充规则。

定理 1.1.4 （**假言三段论式 *HS***）设 α，β，γ 是 L 的任意公式，若$\vdash \alpha\to\beta$，$\vdash \beta\to\gamma$，则$\vdash \alpha\to\gamma$。

证明 由例 5 已证.

(1) $\vdash(\alpha\to\beta)\to(\beta\to\gamma)\to\alpha\to\gamma$ 例 5

(2) $\vdash \alpha\to\beta$ 题设

(3) $\vdash(\beta\to\gamma)\to\alpha\to\gamma$ (1)，(2) MP

(4) $\vdash \beta\to\gamma$ 题设

(5) $\vdash \alpha\to\gamma$ (3)，(4) MP ▌

应用"假言三段论式" HS，也可以使例 3 的证明过程大大简化，例 3 证明中的 (7) 可以由 (1)、(2) 经 HS 得到。下面再给出一例说明演绎定理和 HS 的作用。

例 6 证明 $\vdash(\neg\alpha\to\alpha)\to\alpha$.

证明 由演绎定理，我们只要证明$\neg\alpha\to\alpha\vdash\alpha$

(1) $\neg\alpha\to\alpha\to\neg(\neg\alpha\to\alpha)$ 例 2

(2) $(\neg\alpha\to\alpha\to\neg(\neg\alpha\to\alpha))\to(\neg\alpha\to\alpha)\to\neg\alpha\to\neg(\neg\alpha\to\alpha)$ $Ax2$

(3) $(\neg\alpha\to\alpha)\to\neg\alpha\to\neg(\neg\alpha\to\alpha)$ (1)，(2) MP

(4) $(\neg\alpha\to\neg(\neg\alpha\to\alpha))\to(\neg\alpha\to\alpha)\to\alpha$ $Ax3$

(5) $(\neg\alpha\to\alpha)\to(\neg\alpha\to\alpha)\to\alpha$ (3)，(4) HS

(6) $\neg\alpha\to\alpha$ Γ

(7) α (6)，(5) 二次 MP ▌

无论是演绎定理，还是假言三段论式，即定理 1.1.2 和 1.1.4 中，细心的读者都会发现这两个定理的证明中都只用到 $Ax1$ 和 $Ax2$，和推理规则 MP. 因此，在命题演算的任何一个形式系统中，只要有 $Ax1$，$Ax2$ 和 MP 成立，而没有其他推演规则，就一定有演绎定理和 HS^{-}。

读者不难看出演绎定理的逆定理是显然成立的。即若 $\Gamma\vdash\alpha\to\beta$，则 Γ，$\alpha\vdash\beta$. 因此，Γ，$\alpha\vdash\beta$ 当且仅当 $\Gamma\vdash\alpha\to\beta$. 又不难

看出假言三段论式也可以写成 $\alpha\to\beta,\beta\to\gamma\vdash\alpha\to\gamma$. 这样 HS 在从 Γ 出发的证明过程中也可以使用。

练习

1.1.1 证明下列各式：

$\vdash(\alpha\to\beta)\to\neg\beta\to\neg\alpha$,

$\vdash(\neg\alpha\to\beta)\to\neg\beta\to\alpha$,

$\vdash\alpha\to\neg\alpha\to\beta$,

$\vdash\alpha\wedge\beta\to\alpha$, $\vdash\alpha\wedge\beta\to\beta$,

$\vdash\alpha\to\alpha\vee\beta$, $\vdash\beta\to\alpha\vee\beta$, $\vdash\alpha\vee\alpha\to\alpha$,

$\vdash\alpha\to\beta\to\alpha\wedge\beta$.

1.1.2 证明：

$\vdash(\alpha\to\beta)\to(\neg(\beta\to\gamma)\to\neg\alpha)\to\alpha\to\gamma$

$\vdash(\alpha\to(\beta\to\gamma))\to\beta\to\alpha\to\gamma$

1.1.3 证明：

$\vdash((\alpha\to\beta)\to\alpha)\to\alpha$

$\vdash\neg(\alpha\to\beta)\to\beta\to\alpha$

1.1.4 将命题演算形式系统 L 中的第三条公理模式换为 $Ax3'$ $\vdash(\neg\alpha\to\neg\beta)\to(\neg\alpha\to\beta)\to\alpha$，得到形式系统 L'，记 L 中的定理为$\vdash_L\alpha$，L'中的定理为$\vdash_{L'}\alpha$，证明对任何公式 α，$\vdash_L\alpha$ 当且仅当$\vdash_{L'}\alpha$，即 L 与 L'有完全相同的定理集.

1.1.5 设 $\Gamma,\alpha\vdash\beta$，$\Gamma\vdash\alpha$，证明 $\Gamma\vdash\beta$；设 $\Gamma\cup\Sigma\vdash\beta$，对任意公式 $\alpha\in\Sigma$，都有 $\Gamma\vdash\alpha$，证明 $\Gamma\vdash\beta$.

1.1.6 证明 $\Gamma\vdash\alpha$，$\Gamma\vdash\beta$ 当且仅当 $\Gamma\vdash\alpha\wedge\beta$.

§1.2 命题逻辑的模型

形式系统 L 中全体命题变元符号为 P_1，P_2，…，L 的一个模型 A 是全体命题变元组成集合的一个子集，即 $A\subset\{P_1, P_2\cdots\}$. 例如 $A_1=\{P_1, P_2\}$，$A_2=\{P_1, P_3, P_5\}$，$A_3=\{P_{2n};\ n<\omega\}$都是 L 的模型. 特别，A 也可以是空集，A 也可以是$\{P_1, P_2, \cdots\}$自身。

L 中任意公式在某个模型中都有一个**赋值**：**“真”**或**“假”**。公式 α 如果在某模型 A 中**取值**为真，记作 $A\models\alpha$。设 A 是 L 的一个模型，L 的公式 α 在 A 中的取值归纳定义如下：

(1) α 是某个命题变元 P_i，$A\models P_i$ 当且仅当 $P_i\in A$；

(2) α 是$\neg\beta$，$A\models\alpha$ 当且仅当 $A\not\models\beta$；即 β 在 A 中取值不为真；

(3) α 是 $\beta\to r$，$A\models\alpha$ 当且仅当 $A\not\models\beta$ 或 $A\models\alpha$.

这个定义也称为是命题逻辑的**语义定义**。当 α 是$\neg\beta$，或 α 是 $\beta\to r$ 时，β，r 的复杂度比 α 小，归纳假设 β，r 在模型 A 中的取值已有定义，这样由语义定义可以确定 α 在 A 中的取值。设 α 是 L 中一个公式，α 中出现的命题变元都在 $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 之中。容易看出 α 在一个模型 A 中的取值，只取决于 $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 中哪些命题变元属于 A，哪些不属于 A，而与命题变元 $P_{m+1}, P_{m+2}, \cdots$ 无关。由此可知一个公式在模型中的取值在有限步内可以判定。

例 1 设 $A=\{P_1, P_3\}$，$B=\{P_2\}$都是 L 的模型，$\alpha=\neg P_1\to P_2\to P_3$ 是 L 的一个公式，则 $A\models\alpha$，$B\not\models\alpha$.

证明 由 $P_1\in A$，知 $A\models P_1$，由语义定义 (2) 有 $A\not\models\neg P_1$，再由语义定义 (3) 有 $A\models\neg P_1\to(P_2\to P_3)$，即 $A\models\alpha$.

由 $B=\{P_2\}$可知 $B\not\models P_1$，$B\models P_2$ 且 $B\not\models P_3$，因此 $B\models\neg P_1$ 且 $B\not\models P_2\to P_3$，再由语义定义 (3)，$B\not\models\neg P_1\to(P_2\to P_3)$，因此 $B\not\models\alpha$. ▌

例 2 设 A 是 L 的一个模型，α，β 是 L 的两个公式，则 $A\models \alpha\wedge\beta$ 当且仅当 $A\models\alpha$ 且 $A\models\beta$；$A\models\alpha\vee\beta$ 当且仅当 $A\models\alpha$ 或 $A\models\beta$；$A\models\alpha\leftrightarrow\beta$ 当且仅当 $A\models\alpha\wedge\beta$ 或 $A\models\neg\alpha\wedge\neg\beta$.

证明 我们只证明其中一个结论而把另二个留给读者作练习。我们知道 $\alpha\wedge\beta$ 是 $\neg(\alpha\rightarrow\neg\beta)$ 的简写。

设 $A\models\alpha\wedge\beta$，即 $A\models\neg(\alpha\rightarrow\neg\beta)$，因此，$A\not\models\alpha\rightarrow\neg\beta$. 由语义定义（3），$A\models\alpha$ 且 $A\not\models\neg\beta$. 由语义定义（2）知，此即 $A\models\alpha$ 且 $A\models\beta$.

设 $A\models\alpha$ 且 $A\models\beta$，则 $A\models\alpha$ 且 $A\not\models\neg\beta$. 由语义定义必有 $A\not\models\alpha\rightarrow\neg\beta$，因此，$A\models\neg(\alpha\rightarrow\neg\beta)$，此即 $A\models\alpha\wedge\beta$. ▌

不难看出语义定义与命题演算中的真值表方法并不矛盾. 由例 1，我们看到一个公式 α，可以在某模型中取值为真，而在另一个模型中取值为假。L 的一个公式 α，如果在任意一个模型中取值都是真，就称 α 为 L 的**恒真式**，记作$\models\alpha$，由例 1 知并非每个公式都是恒真式，但我们可以验证 L 的三条公理都是恒真式。

命题 1.2.1 L 的公理都是恒真式。

证明 只要证明对 L 的任何公式 α,β,r，L 的公理 $Ax1$，$Ax2$，$Ax3$ 都是恒真式。我们只就 $Ax3$ 给出证明，而把其余 2 条留给读者自行验证。

设 A 是 L 的任意一个模型，α，β 是 L 的任意两个公式，分下列两种情况来证明都有 $A\models(\neg\alpha\rightarrow\neg\beta)\rightarrow\beta\rightarrow\alpha$.

(1) 设$A\models\alpha$或$A\not\models\beta$，这时，由语义定义（3）一定有$A\models\beta\rightarrow\alpha$，再由语义定义（3）又有 $A\models(\neg\alpha\rightarrow\neg\beta)\rightarrow\beta\rightarrow\alpha$；

(2) 设$A\not\models\alpha$且$A\models\beta$，由语义定义（2）有$A\models\neg\alpha$且$A\not\models\neg\beta$. 再由语义定义（3）知$A\not\models\neg\alpha\rightarrow\neg\beta$，进而又有
$A\models(\neg\alpha\rightarrow\neg\beta)\rightarrow\beta\rightarrow\alpha$.

合（1），（2）两种情况知不论 α、β 是 L 的什么公式都有 $A\models(\neg\alpha\rightarrow\neg\beta)\rightarrow\beta\rightarrow\alpha$. 再由 A 的任意性有

$\models(\neg\alpha\to\neg\beta)\to\beta\to\alpha$. 因此公理 3 是恒真式. ▌

设 A 是 L 的一个模型，α 是 L 的一个公式，$A\models\alpha$ 也被称为 α 在 A 中成立，或称 A 是 α 的一个模型，A 满足 α 等等。设 T 是 L 的一些公式组成的集合，如果 T 中任何公式 α 都有 $A\models\alpha$，就称 A 是 T 的模型，记作 $A\models T$. 设 α 是一个公式，如果 T 的每个模型都是 α 的模型，就称 T 满足 α，记作 $T\models\alpha$.

定理 1.2.2 **(可靠性定理)** 若 $T\vdash\alpha$ 则 $T\models\alpha$.

证明 设 $T\vdash\alpha$，即 α 是 T 的推论，由定义知存在由 T 出发的一个证明 α_1，α_2，$\cdots\alpha_n=\alpha$. 设 A 是 T 的任意一个模型，对 $k\leqslant n$ 归纳证明 $A\models\alpha_k$. $k=1$ 时，设 α_1 是 L 的一条公理，则 α_1 是恒真式，因此有 $A\models\alpha_1$。如果 $\alpha_1\in T$，由 $A\models T$ 也有 $A\models\alpha_1$. 归纳假设已有 $A\models\alpha_1$，$\cdots A\models\alpha_{k-1}$. 证明也有 $A\models\alpha_k$. α_k 是一条公理或 $\alpha_k\in T$ 的情况，仿 α_1 有 $A\models\alpha_k$. 设 α_k 是由 α_i，α_j，i、$j<k$，经 MP 得到。不妨设 $\alpha_j=\alpha_i\to\alpha_k$，由归纳假设已知 $A\models\alpha_i$，$A\models\alpha_j$，即 $A\models\alpha_i\to\alpha_k$. 由语义定义 (3) 只能有 $A\models\alpha_k$. 归纳证明完成。因此有 $A\models\alpha_n$，即 $A\models\alpha$。 ▌

由定理 1.2.2 可以得到如下推论：

推论 1.2.3 L 的一个公式 α，如果 α 是 L 的一条定理，则 α 必是恒真式，即若 $\vdash\alpha$，则 $\models\alpha$.

证明 只要在定理 1.2.2 中 T 是空集就可以了. ▌

形式系统的一个公式集 T 称为是**不和谐的**（也称为是不一致的），如果对这个形式系统中任何公式 α 都有 $T\vdash\alpha$. 如果 T 不是不和谐的，即至少在一个公式 α，使 $T\nvdash\alpha$，则称 T 是**和谐**的公式集。当 T 是空集时，如果 T 是和谐的，就称这个形式系统是和谐的。

定理 1.2.4 命题逻辑形式系统 L 是和谐的。

证明 反证法。设 L 是不和谐的，即对 L 的任意公式 α，都有 $\vdash\alpha$. 由推论 1.2.3 知对任意公式都有$\models\alpha$，即任意公式都是恒

真式。而这显然是不成立的。因此，L 是和谐的。 ▌

命题 1.2.5 设 T 是 L 的一个公式集，如果 L 中有一个模型 $A\models T$，则 T 是和谐的。

证明 设 T 有一个模型 A，但 T 是不和谐的。即对 L 的每个公式 α 都有 $T\vdash\alpha$。由可靠性定理 $T\models\alpha$，因此 $A\models\alpha$，即 L 的任意公式在 A 中都取真值。而这是不可能的，因为对某个公式 α，$A\models\alpha$，当且仅当 $A\not\models\neg\alpha$. 这样，T 一定是和谐的。 ▌

练习

1.2.1 设 A 是 L 的一个模型，α、β 是 L 的任意两个公式，证明：$A\models\alpha\vee\beta$当且仅当$A\models\alpha$或$A\models\beta$。$A\models\alpha\leftrightarrow\beta$当且仅当$A\models\alpha\wedge\beta$或$A\models\neg\alpha\wedge\neg\beta$当且仅当$A\models\alpha\rightarrow\beta$且$A\models\beta\rightarrow\alpha$.

1.2.2 证明 $Ax1$、$Ax2$ 的任意一条公理都是恒真式。

1.2.3 一个公式称为恒假式，如果它在 L 的任意模型中都取假值。证明 $\alpha\wedge(\neg\alpha)$ 是恒假式，其中 α 是 L 的任意公式。

1.2.4 证明$(\neg P_1\rightarrow P_2)\rightarrow P_1\rightarrow\neg P_2$ 不是恒假式也不是恒真式。

1.2.5 令 $T=\{(\neg\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow\alpha\rightarrow\neg\beta$: α、β 是 L 的公式$\}$，证明 T 没有模型。

1.2.6 设 α 是 L 的一个公式，α 不是恒假式，就称 α 是可满足的。证明任意一个可满足的公式 α，都有无限多个模型。

1.2.7 设 L 中只有有限多个命题变元符号 $P_1,P_2,\cdots\cdots,P_n$，证明 L 中只有 2^n 个互不相同的模型；证明存在 2^n 个公式使每个公式都只在其中一个模型中取值为真，而在其余的模型中取值为假。

1.2.8 设公式 α 中只含命题变元 P_1，P_2，$\cdots\cdots$，P_n，A 是 L 的一个模型。对公式的复杂性归纳证明 α 在 A 中的取值只与 P_1，P_2，$\cdots\cdots$，P_n 是否属于 A 有关，而与其余的命题变元是否属于 A

无关。

1.2.9　L 中任一公式 α 在某个模型中的取值是有限步内可判定的。

1.2.10　L 中任一公式 α 是否恒真式是有限可判定的。

§1.3　命题逻辑的完全性

形式系统 L 的**完全性**是指 L 中的任一公式 α，如果 α 是恒真式则 α 是 L 的一个定理，即若$\models\alpha$ 则$\vdash\alpha$。命题逻辑的完全性可以用语法的推演直接证明。而我们现在要用模型论的方法，即语义和语法结合的方法来证明：一个和谐的公式集一定有模型。由此可以得到完全性定理。这个方法对命题逻辑并不比语法推演简单，但可以使我们对下一章谓词逻辑的完全性定理的证明有较大的启发性。下面我们先来研究和谐公式集的一些性质。

命题 1.3.1　设 T 是 L 的一个公式集，T 不和谐当且仅当存在一个公式 α，$T\vdash\alpha$ 且 $T\vdash\neg\alpha$.

证明（$\Rightarrow$）　设 T 不和谐，则 L 中任意公式 α，$T\vdash\alpha$，当然也有 $T\vdash\neg\alpha$.

（$\Leftarrow$）　设 α 是 L 的一个公式，$T\vdash\alpha$，且 $T\vdash\neg\alpha$，由 §1 例 2，对 L 中任意公式 β，有$\vdash\neg\alpha\to(\alpha\to\beta)$，不难看出有$T\vdash\alpha\to\beta$，进而有 $T\vdash\beta$. 因此 T 是不和谐的公式集。 ▌

实际上，$\alpha\wedge\neg\alpha$ 是一个**恒假式**或称为**矛盾式**，命题 1.3.1 可以简写为，T 不和谐当且仅当存在矛盾式$\alpha\wedge\neg\alpha$，使$T\vdash\alpha\wedge\neg\alpha$. 见练习 1.1.6.

命题 1.3.2　设 T 是 L 的一个公式集，T 是和谐公式集当且仅当 T 的每个有限子集都是 L 的和谐公式集。

证明（$\Rightarrow$）　设 T 是和谐公式集。若存在一个有限子集$T'\subset T$，

T'不和谐，则存在矛盾式$\alpha\wedge\neg\alpha$，使$T'\vdash\alpha\wedge\neg\alpha$. 当然有$T\vdash\alpha\wedge\neg\alpha$，这样$T$也不和谐，与假设矛盾。因此$T$的每个有限子集都和谐。

（$\Leftarrow$） 设T的每个有限子集都和谐，但T不和谐。则存在公式α，使$T\vdash\alpha\wedge\neg\alpha$，即$\alpha\wedge\neg\alpha$是$T$的推论，因此存在一个从$T$出发到$\alpha\wedge\neg\alpha$的证明$\alpha_1$，$\alpha_2$，……，$\alpha_n=\alpha\wedge\neg\alpha$，由于这个证明一定是有限的公式序列，其中用到的$T$中公式只有有限多个，因此存在有限公式集$T'\subset T$，$T'\vdash\alpha\wedge\neg\alpha$. 这样$T'$便是不和谐公式集，与假设矛盾。因此$T$是和谐公式集。 ▌

命题 1.3.3 设T是L的和谐公式集，α是L的一个公式，若$T\vdash\alpha$，则$T\cup\{\alpha\}$是L的和谐公式集；若$T\nvdash\alpha$，则$T\cup\{\neg\alpha\}$是L的和谐公式集。

证明 设$T\vdash\alpha$但$T\cup\{\alpha\}$不和谐，则存在矛盾式$\beta\wedge\neg\beta$，使T，$\alpha\vdash\beta\wedge\neg\beta$. 由演绎定理有$T\vdash\alpha\to\beta\wedge\neg\beta$，再由$T\vdash\alpha$可得$T\vdash\beta\wedge\neg\beta$. 这样$T$不和谐，与题设矛盾。因此$T\cup\{\alpha\}$是和谐的。

设$T\nvdash\alpha$，而$T\cup\{\neg\alpha\}$不和谐，则T，$\neg\alpha\vdash\alpha$. 由演绎定理有$T\vdash\neg\alpha\to\alpha$，由§1例6 $\vdash(\neg\alpha\to\alpha)\to\alpha$，由命题1.1.1得，$T\vdash\alpha$与$T\nvdash\alpha$矛盾，因此，$T\cup\{\neg\alpha\}$和谐。 ▌

设T是L中一个和谐公式集，如果L中没有真包含T的和谐公式集，则T称为L的**极大和谐公式集**。这就是说T是极大的和谐公式集，当且仅当T和谐，并且对L中任意一个公式α，如果$\alpha\notin T$，则$T\cup\{\alpha\}$不和谐。

设A是L的一个模型，令$\mathrm{Th}(A)=\{\alpha: A\models\alpha\}$，即$\mathrm{Th}(A)$是模型$A$所满足的全部公式的集合，则$\mathrm{Th}(A)$是$L$的一个极大和谐公式集。由$\mathrm{Th}(A)$的定义知$A\models\mathrm{Th}(A)$，由定理1.2.5知$\mathrm{Th}(A)$是和谐的。设$\alpha$是$L$的一个公式，$\alpha\notin\mathrm{Th}(A)$，即$A\nvDash\alpha$，从而有$A\models\neg\alpha$，因此$\neg\alpha\in\mathrm{Th}(A)$，容易看出$\mathrm{Th}(A)\cup\{\alpha\}$是不和谐公式

集，这样 Th(A) 是极大和谐公式集。

极大和谐公式集有如下性质：

命题 1.3.4 设 T 是 L 的极大和谐公式集，则

(1) 设 α 是 L 的公式，$T\vdash\alpha$ 当且仅当 $\alpha\in T$；

(2) 对 L 的任意公式 α，α 或 $\neg\alpha$ 恰有一个属于 T；

(3) $\alpha\rightarrow\beta\in T$ 当且仅当 $\alpha\notin T$ 或 $\beta\in T$.

证明 (1) 设 $T\vdash\alpha$，由命题 1.3.3 知 $T\cup\{\alpha\}$ 和谐。由 T 是极大和谐集知必有 $\alpha\in T$，另一个方向由命题 1.1.1 (1) 可知。

(2) 首先 α 和 $\neg\alpha$ 不能同时属于 T，否则 $T\vdash\alpha\wedge\neg\alpha$，$T$ 不和谐。现在设 $\alpha\notin T$，则 $T\nvdash\alpha$，由命题 1.3.3 知 $T\cup\{\neg\alpha\}$ 和谐，由 T 是极大和谐集有 $\neg\alpha\in T$.

(3) 设 $\alpha\rightarrow\beta\in T$，$\alpha\in T$，则 $T\vdash\alpha\rightarrow\beta$，$T\vdash\alpha$. 由命题 1.1.1 (2) 有 $T\vdash\beta$. 由 (1) 知 $\beta\in T$. 反之，$\alpha\notin T$ 或 $\beta\in T$ 当 $\alpha\notin T$ 时，由 (2) 有 $\neg\alpha\in T$，因此 $T\vdash\neg\alpha$，由 §1 例 2 $\vdash\neg\alpha\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta)$，因此有 $T\vdash\alpha\rightarrow\beta$，由 (2) 知 $\alpha\rightarrow\beta\in T$. 当 $\beta\in T$ 时，则 $T\vdash\beta$ 由 $Ax1$，$\vdash\beta\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta)$ 知 $T\vdash\alpha\rightarrow\beta$，也有 $\alpha\rightarrow\beta\in T$. ▌

L 的一个公式集 T 称为是**完全集**，如果 T 和谐，并且对 L 中任意一个公式 α，$T\vdash\alpha$ 或 $T\vdash\neg\alpha$，易见极大和谐的公式集一定是完全集。

引理 1.3.5 设 T 是 L 的一个和谐公式集，则一定存在公式集 $\overline{T}\supset T$ 使得 $\overline{T}$ 是完全集，称 $\overline{T}$ 是 T 的完全扩充。

证明 由于 L 中命题变元只有可数多个，L 的每个公式都是有限多个命题变元和联结词组成的符号串。因此 L 中的公式至多只有可数多个。我们可以列出 L 的所有公式：

$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n,\ \cdots,\ n<\omega,$

再来构造 L 中和谐公式集的递增序列：

$T=T_0\subset T_1\subset T_2\subset\cdots\subset T_n\subset\cdots,\ n<\omega$

设 $T_n \supset T$ 是 T 的和谐扩充，如果 $T_n \vdash \alpha_n$ 就令 $T_{n+1}=T_n \cup \{\alpha_n\}$；如果 $T_n \nvdash \alpha_n$，就令 $T_{n+1}=T_n \cup \{\neg\alpha_n\}$. 由命题 1.3.3 知 T_{n+1} 是 T 的和谐扩充，这样我们归纳地构造好了 T 的和谐扩充的递增序列。

令 $\overline{T}=\bigcup_{n<\omega} T_n$，由于 $\overline{T}$ 的每个有限子集一定被包含于某个 T_n 之中，因此 $\overline{T}$ 的每个有限子集都和谐，由命题 1.3.2 知 $\overline{T}$ 也是 T 的一个和谐扩充。由 T_n 的构造知对 L 中每个公式 α，或 $\alpha \in \overline{T}$，或 $\neg\alpha \in \overline{T}$，因此 $\overline{T}$ 是极大和谐公式集，因而是 T 的完全扩充。 ▎

引理 1.3.6 设 T 是 L 的一个完全集，则存在一个模型 A，$A \models T$.

证明 令 $A=\{P_i: T \vdash P_i\}$. 我们证明对 L 的任意公式 α，$A \models \alpha$ 当且仅当 $T \vdash \alpha$.

对 α 的复杂性归纳。当 α 为命题变元 P_i 时由 A 的定义，及语义定义（1）知 $A \models P_i$ 当且仅当 $T \vdash P_i$.

设 α 是 $\neg\beta$，$A \models \neg\beta$ 当且仅当 $A \nvDash \beta$. 由归纳假设当且仅当 $T \nvdash \beta$，由 T 是完全集，当且仅当 $T \vdash \neg\beta$.

设 α 是 $\beta \to \gamma$. $A \models \beta \to \gamma$ 当且仅当 $A \nvDash \beta$ 或 $A \models \gamma$，由归纳假设当且仅当 $T \nvdash \beta$ 或 $A \vdash \gamma$，由归纳假设当且仅当 $T \vdash \neg\beta$ 或 $T \vdash \gamma$，当且仅当 $T \vdash \beta \to \gamma$. 最后一个当且仅当可参看命题 1.3.4 的证明。

这样，我们就完成了归纳，得到 $A \models \alpha$ 当且仅当 $T \vdash \alpha$，对于每个 $\alpha \in T$，自然有 $T \vdash \alpha$，因此 $A \models \alpha$，这就是 $A \models T$. ▎

现在我们得到广义完全性定理。

定理 1.3.7 （广义完全性定理） 设 T 是 L 的和谐公式集，则 T 是可满足的，即 T 有模型。

证明 由引理 1.3.5，知 T 有完全扩充 $\overline{T}$，由引理 1.3.6，$\overline{T}$ 有模型 A，$A \models \overline{T}$，由 $\overline{T} \supset T$，当然有 $A \models T$. ▎

定理 1.3.8 设 T 是 L 的和谐公式集，α 是 L 的任意一个公式，若 $T\models\alpha$，则 $T\vdash\alpha$.

证明 反证法。设 $T\nvdash\alpha$，由命题 1.3.3，$T\cup\{\neg\alpha\}$ 是和谐的，由广义完全性定理 1.3.7 知 $T\cup\{\neg\alpha\}$ 有模型 A，这样 $A\models T$ 且 $A\models\neg\alpha$，这与 $T\models\alpha$ 矛盾。 ▌

推论 1.3.9 （L 的**完全性定理**） 设 α 是 L 的任意一个公式，若 α 是恒真式，则 α 一定是 L 的一条定理，即若 $\models\alpha$ 则 $\vdash\alpha$.

证明 只要把定理 1.3.8 中的 T 取空集，就得到推论 1.3.9. ▌

广义完全性定理有一个非常有趣的推论。我们称一个公式集是**可满足的**，如果这个公式集有一个模型。一个公式集称为**有限可满足的**，如果这个公式集的每个有限子集都是可满足的。

定理 1.3.10 （**紧致性定理**） 设 T 是 L 的一个公式集，T 是可满足的当且仅当 T 是有限可满足的。

证明 （$\Rightarrow$） 是显然的。

（$\Leftarrow$） 设 T 是有限可满足的，则 T 的每个有限子集都有模型，由定理 1.2.5，T 的每个有限子集都是和谐的，由命题 1.3.2 知 T 是和谐公式集，这样由广义完全性定理知 T 是可满足的。▌

紧致性定理是模型论最重要的定理之一，下一节，我们要给出紧致性定理在命题逻辑模型论中的一些简单应用。

我们把形式系统 L 中的从公理出发的证明或从一组公式集出发的证明叫做 L 的**语法**，而把公式或公式集在模型中的取值等叫做 L 的**语义**。广义完全性定理给出了语义和语法的关系，设 T 是 L 的公式集，α 是 L 的一个公式，我们有下表：

T 和谐	当且仅当	T 可满足
$T\vdash\alpha$	当且仅当	$T\models\alpha$
$\vdash\alpha$	当且仅当	$\models\alpha$

表中左边是语法关系，右边是语义关系。模型论的一个重要内容

就是研究形式系统语法和语义的关系。不难看出紧致性定理是纯语义的，第五章中，我们将看到它有纯语义的证明。

练习

1.3.1　设 T 是 L 的一个极大和谐公式集，α、β 是 L 的任意两个公式，证明：(1) $\alpha\wedge\beta\in T$ 当且仅当 $\alpha\in T$ 并且 $\beta\in T$；(2) $\alpha\vee\beta\in T$ 当且仅当 $\alpha\in T$ 或 $\beta\in T$；(3) $\alpha\leftrightarrow\beta\in T$ 当且仅当 $\alpha,\beta\in T$ 或 $\alpha,\beta\notin T$.

1.3.2　设 T 是完全集，$\Gamma=\{\alpha:T\vdash\alpha\}$，证明 Γ 是极大和谐公式集，反之亦真。

1.3.3　设 T 是 L 的一个公式集，证明 T 是完全集当且仅当 T 有而且只有一个模型。

1.3.4　称一个公式 α 是和谐的，如果 $\{\alpha\}$ 是和谐的。证明若 $\nvdash\neg\alpha$，则 α 是和谐的；如果 α 和谐，则 α 是可满足的。

1.3.5　设 L 中只有有限多个命题变元符号 P_1，P_2，…，P_n. 证明存在一个公式 α，$\{\alpha\}$ 是 L 的一个完全集。

1.3.6　设 α，β 是 L 的两个公式，α，β 的模型完全相同，即 α 的模型是 β 的模型，β 的模型也是 α 的模型，证明 $\vdash\alpha\leftrightarrow\beta$.

1.3.7　设 α，β 是 L 的两个公式，证明：

$\vdash\neg(\alpha\wedge\beta)\leftrightarrow\neg\alpha\vee\neg\beta$；　$\vdash\neg(\alpha\vee\beta)\leftrightarrow\neg\alpha\wedge\neg\beta$. 同样对 L 中任意 n 个公式 α_1，α_2，…α_n，有

$\vdash\neg(\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_n)\leftrightarrow\neg\alpha_1\vee\cdots\vee\neg\alpha_n$；

$\vdash\neg(\alpha_1\vee\cdots\vee\alpha_n)\leftrightarrow\neg\alpha_1\wedge\cdots\wedge\neg\alpha_n$；

$\vdash\alpha_1\rightarrow\alpha_2\rightarrow\cdots\rightarrow\alpha_n\rightarrow\beta$ 当且仅当 $\vdash\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_n\rightarrow\beta$.

1.3.8　试给出一例说明一个完全集不一定是一个极大和谐集。

1.3.9　L 的任一公式是否是 L 的定理是有限可判定的。

1.3.10　设 T 是 L 的一个和谐公式集，φ，θ_1，θ_2 都是 L 的公

式，证明

(i) 若 $T\vdash\theta_1$，且 $T\vdash\theta_2$，则 $T\vdash\theta_1\wedge\theta_2$。

(ii) 若 $T\vdash\varphi\rightarrow\theta_1$ 且 $T\vdash\neg\varphi\rightarrow\theta_2$，则 $T\vdash\theta_1\vee\theta_2$。

§1.4 命题逻辑模型论

本节介绍命题逻辑模型论的一些基本结果，这会使我们对模型论有一个初步的了解。

L 的一个公式集 T 也被称为一个**理论**；一个公式集 Γ 被称为是一个理论 T 的**公理集**，如果对任意公式 α，$\Gamma\vdash\alpha$ 当且仅当 $T\vdash\alpha$，即 Γ 与 T 有完全相同的推理集。一个理论称为**可有限公理化**，如果有一个有限公式集作它的公理集。

定理 1.4.1 设 T 是一个理论，Γ 是一个公式集，Γ 是 T 的公理集当且仅当 Γ 与 T 的模型完全相同。

证明 (⇒) 设 Γ 是 T 的公理集，模型 $A\models\Gamma$，对任意 $\alpha\in T$，由 $T\vdash\alpha$ 知 $\Gamma\vdash\alpha$，因此 $A\models\alpha$. 于是有 $A\models T$，如果模型 $A\models T$ 一样有 $A\models\Gamma$. 所以 Γ 与 T 的模型完全相同.

(⇐) 设 Γ 与 T 的模型完全相同，即对任意模型 A，$A\models\Gamma$ 当且仅当 $A\models T$. 设 Γ 不是 T 的公理集，则存在公式 α，使 $\Gamma\vdash\alpha$ 而 $T\nvdash\alpha$，或 $T\vdash\alpha$ 而 $\Gamma\nvdash\alpha$. 不妨设有 $\Gamma\vdash\alpha$，$T\nvdash\alpha$（另一种情况可同样证明），由命题 1.3.3，$T\cup\{\neg\alpha\}$ 和谐，因而有模型 $A\models T$，$A\models\neg\alpha$，但这时有 $A\models\Gamma$，从而 $A\models\alpha$，得到矛盾。 ▎

命题 1.4.2 设 T_1,T_2 是 L 的两个理论，对 L 的任意模型 A，A 恰是 T_1，T_2 之一的模型，则 T_1，T_2 都可以有限公理化。

证明 由题设，公式集 $T_1\cup T_2$ 没有模型，由紧致性定理 $T_1\cup T_2$ 不有限可满足，因此存在有限子集 $\Gamma_1\subset T_1$，$\Gamma_2\subset T_2$，使 $\Gamma_1\cup\Gamma_2$ 不可满足。设 A 是 L 的任意一个模型，设 $A\models\Gamma_1$，则 A 不

是 Γ_2 的模型，因此 A 不是 T_2 的模型，由题设 $A\models T_1$，由命题 1.4.1 知 Γ_1 是 T_1 的公理集，因此 T_1 可以有限公理化。同样 T_2 也可以有限公理化. ▌

由命题变元符号和逻辑联结符号 $\wedge$，$\vee$ 连成的公式叫做**正公式**。例如 $(P_1\wedge(P_2\vee P_3))\vee P_5$ 是正公式，而 $\neg P_1$，$P_2\to P_3$ 等不是正公式。一个公式集 T 称为有保增性或称为是**保增**的，如果对模型 A，B，当 $A\subset B$，$A\models T$ 时有 $B\models T$.

命题 1.4.3 设 A，B 是命题逻辑的两个模型，$A\subset B$，当且仅当对每个正公式 α，若 $A\models\alpha$ 则 $B\models\alpha$.

证明 (⇒) 设 $A\subset B$，对正公式 α 的复杂性归纳证明，若 $A\models\alpha$，则 $B\models\alpha$.

当 α 是单个命题变元 P_i 时，若 $A\models P_i$，则 $P_i\in A$，由 $A\subset B$ 有 $P_i\in B$，因此，有 $B\models P_i$.

设 $\alpha=\beta\wedge r$，则 β，r 也是正公式。若 $A\models\alpha$，则 $A\models\beta$，且 $A\models r$. 由归纳假设有 $B\models\beta$ 且 $B\models r$，因此 $B\models\alpha$. 对 $\alpha=\beta\vee r$ 类似可证。

(⇐) 设对每个正公式 α，若 $A\models\alpha$，则 $B\models\alpha$. 任取 $P_i\in A$，有 $A\models P_i$，因此 $B\models P_i$，于是有 $P_i\in B$，从而 $A\subset B$. ▌

命题 1.4.4 设 T 是一个和谐理论，T 有保增性当且仅当 T 有正公式组成的公理集 Γ.

证明 (⇐) 设 Γ 是由正公式组成的公式集，Γ 是理论 T 的公理集，A，B 是两个模型，$A\subset B$，$A\models T$. 我们证明 $B\models T$. 由 Γ 是 T 的公理集知 $A\models\Gamma$. 因此对任意 $\alpha\in\Gamma$ 有 $A\models\alpha$，但 α 是正公式，$A\subset B$，由命题 1.4.3 知 $B\models\alpha$，这样有 $B\models\Gamma$，从而 $B\models T$，因此 T 有保增性。

(⇒) 设 T 有保增性。令 $\Gamma=\{\alpha : \alpha$ 是正公式且 $T\vdash\alpha\}$，我们来证明 Γ 是 T 的公理。由命题 1.4.1，只要证明 Γ 与 T 有完全相同的模型。容易看出 T 的任意一个模型都是 Γ 的模型，只需证 Γ 的模型都是 T 的模型。设 B 是 Γ 的任意一个模型，我们要证明

$B\models T$. 令 $\Sigma=\{\neg\alpha$：α 是正公式，$B\models\neg\alpha\}$，我们断定 $T\cup\Sigma$ 是和谐公式集。

任取 Σ 的有限子集 $\{\neg\alpha_1,\cdots,\neg\alpha_n\}$，则 $B\models\neg\alpha_1\wedge\cdots\cdots\wedge\neg\alpha_n$，因此有 $B\models\neg(\alpha_1\vee\cdots\vee\alpha_n)$. 由 α_1，…，α_n 是正公式，$\alpha_1\vee\cdots\vee\alpha_n$ 也是正公式，这样 $T\nvdash\alpha_1\vee\cdots\vee\alpha_n$，否则 $\alpha_1\vee\cdots\vee\alpha_n\in\Gamma$，而导致 $B\models\alpha_1\vee\cdots\vee\alpha_n$ 的矛盾。而由命题 1.3.3，从 $T\nvdash\alpha_1\vee\cdots\vee\alpha_n$ 可得 $T\cup\{\neg(\alpha_1\vee\cdots\vee\alpha_n)\}$ 和谐。这样 $T\cup\{\neg\alpha_1,\cdots,\neg\alpha_n\}$ 也和谐。这就是说 $T\cup\Sigma$ 的每个有限子集都和谐，由紧致性定理，$T\cup\Sigma$ 是可满足的。设 A 是 $T\cup\Sigma$ 的模型，则 $A\models T$，$A\models\Sigma$. 这样对任意正公式 α，如果 $B\models\neg\alpha$，则 $\neg\alpha\in\Sigma$，从而 $A\models\neg\alpha$. 反过来说就是对每个正公式 α，如果 $A\models\alpha$，就有 $B\models\alpha$. 由命题 1.4.3，$A\subset B$，最后由 T 的保增性知 $B\models T$. ▎

定理 1.4.5 设 α 是 L 的一个公式，α 不是恒真式也不是恒假式，α 具有保增性当且仅当 α 等价于一个正公式。

证明 ($\Leftarrow$) 设 α 等价于一个正公式 β，即 $\vdash\alpha\leftrightarrow\beta$，则 α，β 有完全相同的模型，由命题 1.4.4，β 有保增性，因此 α 也有保增性。

($\Rightarrow$) 设 α 有保增性，因为 α 不是恒假式，所以 $\{\alpha\}$ 和谐，由命题 1.4.4，$\{\alpha\}$ 有正公理集 Γ，因此 $\Gamma\vdash\alpha$，这样必有一个有限子集 $\{\gamma_1,\cdots,\gamma_n\}\subset\Gamma$，使 $\gamma_1,\cdots,\gamma_n\vdash\alpha$. 由于 α 不是恒真式，$n\neq 0$，这样有 $\gamma_1\wedge\cdots\wedge\gamma_n\vdash\alpha$，$\vdash\gamma_1\wedge\cdots\wedge\gamma_n\to\alpha$，由于 Γ 是 α 的公理集，因此有 $\alpha\vdash\gamma_1$，…，$\alpha\vdash\gamma_n$，当然有 $\alpha\vdash\gamma_1\wedge\cdots\wedge\gamma_n$，$\vdash\alpha\to\gamma_1\wedge\cdots\wedge\gamma_n$. 因此 α 与 $\gamma_1\wedge\cdots\wedge\gamma_n$ 等价。而 $\gamma_1\wedge\cdots\wedge\gamma_n$ 是一个正公式。 ▎

现在我们来看命题逻辑中的 **Horn 公式**。一个公式 α 叫做**基本 Horn 公式**，如果 $\alpha=\alpha_1\vee\cdots\vee\alpha_n$，其中至多一个 α_i，$1\leqslant i\leqslant n$，是单个命题变元，其余的 α_j，$j\neq i$，都是单个命题变元的否定。例如 $\neg P_1\vee\neg P_2$，$\neg P_1\vee\neg P_2\vee P_3$，$P_1$ 等都是基本 Horn 公式，基本 Horn 公式的合取式称为 Horn 公式。

一个公式集 T 叫做**保持有限交**，如果对任意两个模型 A、B，$A\models T$、$B\models T$ 都有 $A\cap B\models T$. 容易看出如果 T 保持有限交，则 T 的任意有限多个模型的交仍是 T 的模型。

公式集 T 叫做**保持任意交**，如果 T 的任意多个模型的交仍是 T 的模型。

命题 1.4.6 一个理论 T 保持任意交当且仅当 T 保持有限交。

证明 ($\Rightarrow$) 是显然的。

($\Leftarrow$) 设 T 保持有限交，令 $\{A_i, i\in I\}$ 是一个模型族，对每个 $i\in I$，$A_i\models T$，令 $B=\bigcap_{i\in I}A_i$，我们要证明 $B\models T$. 令 $\Sigma=\{P_i: B\models P_i\}\cup\{\neg P_j: B\models\neg P_i\}$，$\Sigma$ 是 B 中命题变元和不在 B 中的命题变元的否定组成的集合。我们断定 $T\cup\Sigma$ 可满足。任取 Σ 的有限子集，设其中含有命题变元的否定为$\neg P_1$，…，$\neg P_n$。当 $n=0$ 时，即这个有限子集中没有命题变元的否定而只有 B 中命题变元，由 $B=\bigcap_{i\in I}A_i$，B 中命题变元属于每个 A_i，所以每个 A_i 都是这个有限子集的模型。当 $n>0$ 时，则一定存在 i_1，…，$i_n\in I$，使 $P_i\notin A_{i1}$，…，$P_n\notin A_{in}$。令 $A=A_{i1}\cap\cdots\cap A_{in}$，不难看出 A 是这个有限子集的模型，由 T 保持有限交，又有 $A\models T$，这样 $T\cup\Sigma$ 是有限可满足的，由紧致性定理 $T\cup\Sigma$ 有模型，但是容易看出 Σ 只有一个模型 B，因此 $B\models T$. ▌

由命题 1.4.6 知 T 保持有限交与 T 保持任意交是一致没有区别的，这样我们可以统称 T **保交**而不分有限与任意。

命题 1.4.7 理论 T 保交当且仅当 T 有以 Horn 公式组成的公理集。

证明 ($\Leftarrow$) 只要证明每个 Horn 公式保交，为此只要证明每个基本 Horn 公式保持有限交。设 $\alpha=\neg\alpha_1\vee\neg\alpha_2\vee\cdots\vee\neg\alpha_n\vee\beta$，其中 α_1，…，α_n，β 都是单个命题变元。设模型 A、B 都满足 α，我

们证明 $A\cap B\models\alpha$. 如果 A 或 B 有一个满足某$\neg\alpha_i$，$1\leqslant i\leqslant n$，不妨设 $A\models\neg\alpha_1$，则 $\alpha_1\notin A$，因此 $\alpha_1\notin A\cap B$，$A\cap B\models\neg\alpha_1$，于是有 $A\cap B\models\alpha$. 如果对任意 $i=1$，…，n，都有 $A\models\alpha_i$，$B\models\alpha_i$，则必有 $A\models\beta$，$B\models\beta$，因此有 $A\cap B\models\beta$，于是也有 $A\cap B\models\alpha$.

（⇒） 设理论 T 保交。令$\Gamma=\{\alpha$：α是Horn公式，$T\vdash\alpha\}$，我们证明 Γ 是 T 的公理集。由命题 1.4.1，只要证明 T 与 Γ 有完全相同的模型。容易看出 T 的任一模型都是 Γ 的模型。现在设模型 $B\models\Gamma$，我们来证明 $B\models T$. 分两种情况加以讨论。

（1） B 包含了 L 的全体命题变元，即任意命题变元 $P_i\in B$. 令 $\Sigma=\{P_i$：P_i 是 L 的命题变元$\}$，我们断定 $T\cup\Sigma$ 可满足。任取 Σ 的有限子集 α_1，…，α_n，由 $B\models\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_n$，$B\not\models\neg\alpha_1\vee\cdots\vee\neg\alpha_n$，及 $\neg\alpha_1\vee\cdots\vee\neg\alpha_n$ 是 Horn 公式知 $T\nvdash\neg\alpha_1\vee\cdots\vee\neg\alpha_n$，因此 $T\cup\{\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_n\}$和谐，可满足，这样 $T\cup\Sigma$ 有限可满足。由紧致性定理 $T\cup\Sigma$ 可满足，因此有模型。而容易看出 Σ 只有一个模型 B. 这样就必然有 $B\models T$.

（2） 存在 $P_i\notin B$，令 $I=\{i$：$P_i\notin B\}$，对每个 $i\in I$，令 $\Sigma_i=\{\beta_1\wedge\cdots\wedge\beta_n\wedge\neg P_i$：$\beta_1$，…$\beta_n$ 都是 B 中命题变元$\}$，不难看出 Σ_i 中有限多个公式的合取式仍然是 Σ_i 中的公式。对 Σ_i 中任意一个公式 $\beta_1\wedge\cdots\wedge\beta_n\wedge\neg P_i$，有 $B\models\beta_1\wedge\cdots\wedge\beta_n\wedge\neg P_i$，因此 $B\not\models\neg\beta_1\vee\cdots\vee\neg\beta_n\vee P_i$. 由于$\neg\beta_1\vee\cdots\vee\neg\beta_n\vee P_i$ 是 Horn 公式，它一定不是 T 的推论，这样$T\cup\{\beta_1\wedge\cdots\wedge\beta_n\wedge\neg P_i\}$和谐可满足，这就是说 $T\cup\Sigma_i$ 有限可满足。由紧致性定理 $T\cup\Sigma_i$ 有模型。对每个$i\in I$，令$A_i\models T\cup\Sigma_i$则$B\subset A_i$，$P_i\notin A_i$，这样$B=\bigcap_{i\in I}A_i$，由 T 保交知必有$B\models T$. ▌

定理 1.4.8 L 的一个公式保交当且仅当等价于一个 Hron 公式。

证明 由命题 1.4.7 知 Horn 公式保交。设 α 是 L 的一个公式，α 保交，由命题 1.4.7 知 $\{\alpha\}$ 有 Horn 公式组成的公理集 Γ，

由 $\Gamma\vdash\alpha$ 知必有有限多个公式 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n\in\Gamma$，使 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n\vdash\alpha$. 因此有 $\vdash\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_n\to\alpha$，再由 $\alpha\vdash\alpha_1, \cdots, \alpha\vdash\alpha_n$，也有 $\alpha\vdash\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_n$，因此有 $\vdash\alpha\to\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_n$. 因此 α 等价于 $\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_n$. 由于$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$是 Horn 公式，从而$\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_n$也是 Horn 公式。 ▎

定理 1.4.5，1.4.8 给出两个语义和语法概念等价的例子：

α 保增　当且仅当 α 等价于正公式

α 保交　当且仅当 α 等价于 Horn 公式

这些例子都是在命题逻辑中应用紧致性定理得到的结果。在一阶逻辑中由于公式和模型都更复杂，类似的问题变得复杂和困难得多，当然也就更有趣，更有吸引力。

练习

1.4.1　设 A, B 是命题逻辑的两个模型，证明 $A=B$ 当且仅当 A, B 满足的公式完全相同。

1.4.2　设 T 是一个和谐理论，B 是一个模型，设 T_P 是 T 的所有正公式推论组成的集合，即 $T_P=\{\alpha: \alpha\text{是正公式}, T\vdash\alpha\}$，证明 $B\models T_P$ 当且仅当存在模型 A，$A\models T$，$A\subset B$.

1.4.3　设 T 是一个和谐理论，B 是一个模型，设 T_n 是 T 的所有 Horn 公式推论组成的集合，即 $T_n=\{\alpha: \alpha\text{是 Horn 公式}, T\vdash\alpha\}$，证明 $B\models T_n$ 当且仅当存在模型族 A_i，$i\in I$，对每个 $i\in I$，$A_i\models T$，且 $B=\bigcap_{i\in I}A_i$.

1.4.4　令 T 是无限多个单个命题变元组成的公式的公式集，证明 T 不可有限公理化。

1.4.5　令 $L_1=\{P_i: i\in I_1\}$，$L_2=\{P_i: i\in I_2\}$，$L=L_1\cap L_2$，T_1 是 L_1 的和谐理论，T_2 是 L_2 的和谐理论，$T_1\cap T_2$ 是 L 的完全理论，则 $T_1\cup T_2$ 是 $L_1\cup L_2$ 的和谐理论。

第二章　一阶逻辑

§2.1　一阶逻辑形式系统

1. 第一章我们已经介绍了命题逻辑形式语言。但我们知道，只用命题语言还不能描述那怕是简单的数学概念。比如数学中的函数 $F(x)$，大于关系 $>$，由它们构成的命题：对每个 x，$F(x)\geqslant 0$；存在一个 x，$F(x)<0$，等等，不可能只用命题变元来刻划。为了能够描述数学概念，我们要用更复杂的形式化语言。

一阶逻辑形式语言 $\mathscr{L}$ 是指以下三组符号组成的集合。这些符号可以只是有限多个，也可以是可数无限多个，甚至可能有超穷无限多个，即不可数无限多个。

(1) **关系符号** R_i，$i\in I$；

(2) **函数符号** F_j，$j\in J$；

(3) **个体常量符号** c_k，$k\in K$.

记 $\mathscr{L}=\{\{R_i\}_{i\in I},\ \{F_j\}_{j\in J},\ \{c_k\}_{k\in K},\}$，对 $\mathscr{L}$ 中每个关系符号 R_i，$i\in I$，有某一个确定的正整数 $n\geqslant 1$，称 R_i 是 n 元关系符号。对 $\mathscr{L}$ 中每个函数符号 F_j，$j\in J$ 也有某一个确定的正整数 $m\geqslant 1$，称 F_j 为 m 元函数符号。

对一些常用的有限语言，我们仍用习惯方式来表示，例如，令 $\mathscr{L}_1=\{\leqslant\}$，$\mathscr{L}_2=\{\leqslant,\ +,\ \cdot,\ 0\}$，$\mathscr{L}_3=\{+,\ \cdot,\ -,\ 0,\ 1\}$. $\mathscr{L}_1$ 中只有一个二元关系符号 $\leqslant$，即通常意义下的序关系"小于等于"；$\mathscr{L}_2$ 中除 $\leqslant$ 外，还有两个二元函数符号 $+$，$\cdot$，加法和乘法，以及一个个体常量符号 0；$\mathscr{L}_3$ 中没有关系符号，除了 $+$，$\cdot$ 外还有一个一元函数符号"$-$"，补运算，另外还有个体常量符号 0 和 1.

对于每个形式语言 $\mathscr{L}$，我们总假设其中还有如下一些逻辑符号：

个体变元 $v_0, v_1, v_2, \cdots, v_n, \cdots, n<\omega$；

连接符号 $\rightarrow$（蕴含），$\neg$（非）；

量词符号 $\forall$（任意一个）；

等号 $\equiv$；

括号 (，).

逻辑符号是每个语言 $\mathscr{L}$ 中都有的符号，因而不记入 $\mathscr{L}$ 中。我们称 $\mathscr{L}$ 中的关系，函数和常量符号为非逻辑符号，以 $|\mathscr{L}|$ 记语言 $\mathscr{L}$ 的非逻辑符号集的**基数**，而以 $\|\mathscr{L}\|$ 记 $\mathscr{L}$ 中全体符号的集合的基数，称 $\|\mathscr{L}\|$ 为语言 $\mathscr{L}$ 的**势**。由于逻辑符号有可数无限多个，因此 $\|\mathscr{L}\|=\omega\cup|\mathscr{L}|$. 当 $\mathscr{L}$ 中非逻辑符号只有有限多个或可数多个时，$|\mathscr{L}|\leqslant\omega$，$\|\mathscr{L}\|=\omega$，我们就称 $\mathscr{L}$ 为可数语言。两个形式语言 $\mathscr{L}$，$\mathscr{L}'$，如果 $\mathscr{L}\subseteq\mathscr{L}'$，即 $\mathscr{L}$ 是 $\mathscr{L}'$ 的子集，则称 $\mathscr{L}$ 是 $\mathscr{L}'$ 的**归约**，或称 $\mathscr{L}'$ 是 $\mathscr{L}$ 的**膨胀**，如前例中的 $\mathscr{L}_1$ 是 $\mathscr{L}_2$ 的归约，$\mathscr{L}_2$ 是 $\mathscr{L}_1$ 的膨胀。

2. 项

(1) 单个变元，或单个常量符号是项；

(2) 若 $t_1, \cdots, t_m$ 是项，F_j，$j\in J$，是 $\mathscr{L}$ 的 m 元函数符号，则 $F_j(t_1, \cdots, t_m)$ 是项。

3. 原子公式　(1) 如果 t_1，t_2 是项，则 $t_1\equiv t_2$ 是原子公式；

(2) 如果 $t_1, \cdots, t_n$ 是项，R_i，$i\in I$，是 $\mathscr{L}$ 的 n 元关系符号，则 $R_i(t_1, \cdots t_n)$ 是原子公式。

4. 公式

(1) 原子公式是公式；

(2) 如果 φ，ψ 是公式，则 $(\varphi\rightarrow\psi)$，$(\neg\varphi)$ 也是公式；

(3) 如果 φ 是公式，x 是某个体变元，则 $(\forall x\varphi)$ 也是公式。

上述项，原子公式和公式都是递归定义的。例如 $\mathscr{L}=\{F_1, F_2,$

R_1，R_2，$c\}$，其中 F_1，F_2 分别是一元和二元函数符号，R_1，R_2 分别是一元，三元关系符号，c 是常量符号，则 v_1，v_2，c 是项，$F_1(v_1)$，$F_2(v_1, c)$，$F_2(f_1(v_1), v_2)$ 也是项，$v_1 \equiv v_2$，$v_1 \equiv c$，$F_1(v_1) \equiv c$，$F_2(v_1, c) \equiv F_2(f_1(v_1), v_2)$ 是原子公式，$R_1(c)$，$R_1(f_1(v_1), c)$，$R_2(v_1, v_2, c)$，$R_2(F_2(v_1, c), F_1(v_1), v_2)$ 也是原子公式，$(\neg v_1 \equiv v_2)$，$(\neg R_1(c) \wedge (v_1 \equiv c))$，$\forall v_1(F_1(c) \equiv v_1 \wedge R_1(v_1))$ 是公式。对于常见的一些函数符号和关系符号，由它们生成的项，公式仍采用习惯记法，例如 $\mathscr{L} = \{+, \cdot, \leqslant, 0, 1\}$，则 v_1，v_2，0，1 是项，v_1+1，$v_1 \cdot v_2$，$v_1 \cdot (v_2+0)$ 也是项，$v_1+v_2 \equiv 0$，$v_1 \cdot v_2 \equiv v_2 \cdot v_1$，$v_1+1 \leqslant v_2 \cdot (v_1+0)$，$0 \leqslant 1$ 是原子公式，$\forall v_1(v_1+1 \geqslant 0)$，$\neg \forall v_1(v_1+v_2 \equiv 0 \wedge v_1 \leqslant v_2)$ 等是公式。

第一章中公式的元语言记号常用 α，β，γ，而从现在起我们用 φ、ψ 等元语言记号来表示公式，设 φ、ψ 是一阶逻辑 $\mathscr{L}$ 的公式，与命题逻辑一样，可引进其它联接词，我们可以用联接符号→，$\neg$ 来定义其它联接符号，例如：$\varphi \wedge \psi \overset{df}{=\!=} \neg(\varphi \to \neg\psi)$，$\varphi \vee \psi \overset{df}{=\!=} ((\neg\varphi) \to \psi)$，$\varphi \leftrightarrow \psi \overset{df}{=\!=} (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$. 我们的系统中把“$\forall$ ”当成基本量词符号，而把$\exists$ 当成由“$\neg$，$\forall$ ”组成的公式的简写。设 φ 是 $\mathscr{L}$ 的公式，x 是某个体变元符号，则

$$\exists x\psi \overset{df}{=\!=} (\neg(\forall x)(\neg\varphi))。$$

现在，我们可以在一阶语言 $\mathscr{L} = \{+, \cdot, \leqslant, 0, 1\}$ 中描述这样的数学命题：

“任何一个大于零的数都可以开方”。令

$\varphi = \forall v_1 \exists v_2(\neg(v_1 \leqslant 0) \to v_1 \equiv v_2 \cdot v_2)$. 不难看出 φ 就是适合要求的公式。

为了书写方便我们有时按习惯方式省略那些不会引起歧义的括号，比如公式最外层的括号等等。我们还约定用 $\varphi_1 \to \varphi_2 \to \varphi_3 \to \varphi_4$ 作为 $\varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\varphi_3 \to \varphi_4))$ 的简写，$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$ 作为 $\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge \varphi_3)$ 或 $(\varphi_1$

$\wedge\varphi_2)\wedge\varphi_3$ 的简写等等。对后一种写法的可行性从命题逻辑的语法和语义解释中都不难看出。命题逻辑中的优先顺序$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$在一阶逻辑中同样有效。

我们常用元语言符号 x,y,z 来表示 $\mathscr{L}$ 中的任意个体变化 v_i，v_j，v_k. 一个公式中有$\forall x\varphi$或$\exists y\psi$出现，就称 φ 为量词$\forall x$的**辖域**，ψ 为量词$\exists x$的**辖域**。如果个体变元 x 出现在量词$\forall x$,$\exists x$的辖域内，则称在这个辖域内出现的 x 为**约束变元**，或称 x 在辖域内约束出现，如果 x 不在量词$\forall x$或$\exists x$的辖域内，就称 x 自由出现，自由出现的变元 x 也叫做公式的**自由变元**，例如在公式

$\varphi=\forall v_1(v_1+v_2\equiv 0)\rightarrow\exists v_1\exists v_2(v_1\cdot v_2\equiv 1)$中，$v_1$ 的两处出现都是约束出现，而前一个 v_2 是自由出现，后一个 v_2 是约束出现。这样 v_2 是 φ的自由变元。v_1，v_2 又都在 φ 中有约束出现。

我们将看到自由变元在公式中起着重要作用，因此我们约定用 $t(x_1\cdots x_n)$ 表示一个项 t，t 中所出现的变元都在 x_1，…，x_n 之中。用 $\varphi(x_1\cdots x_n)$ 表示公式 φ，φ 中所有自由变元都在 x_1，…，x_n 中。这里要特别注意，我们并不要求 x_1，…，x_n 都一定在 $t(x_1\cdots x_n)$ 中出现，也并不要求都在 $\varphi(x_1\cdots x_n)$ 中自由出现。而只是要求 $t(x_1\cdots x_n)$中的变元，$\varphi(x_1\cdots x_n)$ 中的自由变元是在 x_1，…，x_n 之中，例如我们可以用 $t_1(v_1v_2v_3)$，$t_2(v_1v_2v_3)$，$t_3(v_1v_2v_3)$ 来表示 $\mathscr{L}=\{+,1\}$中这样三个项，$t_1=1$，$t_2=v_1+1$，$t_3=v_1+v_2+v_3$. 可以用 $\varphi_1(v_1,v_2,v_3)$，$\varphi_2(v_1,v_2,v_3)$，$\varphi_3(v_1,v_2,v_3)$ 来表示这样三个公式：$\varphi_1=(v_1+1\equiv v_2)$，$\varphi_2=\forall v_2(v_1+v_2\equiv v_2+v_1)$；$\varphi_3=\exists v_1(v_2+v_1\equiv v_1+v_2)$。当然在不需要特别指出哪些是公式 φ 中的自由变元时，我们也简单地用 φ 表示任意一个公式，其中含有自由变元，有时也用 $\varphi(x)$ 表示公式 φ 中有自由变元 x，也许还有别的自由变元。

没有自由变元的公式叫做**句子**。不含变元的公式当然是句子，每个变元都约束出现的公式也是句子。例如

$\forall v_1\forall v_2(v_1+v_2\equiv v_2+v_1)$是一个句子，$\neg(1+1\equiv 1)$也是一个句子。一阶逻辑中句子起着极重要的作用。事实上每个公式都可以在其最前面添加上一组全称量词而得到一个句子。

设 $\varphi(x)$ 是一阶语言 $\mathscr{L}$ 的一个公式，x 是 φ 中自由变元，(可能还有别的自由变元)，t 是 $\mathscr{L}$ 的一个项。我们用 $\varphi(v_1/t)$ 表示用 t 代换 φ 中所有自由出现的 v_1 后得到的公式，例如令 $\mathscr{L}=\{+,\ \cdot,\ 1\}$，

$\varphi(v_1)=\forall v_2(v_1+v_2\equiv v_2+v_1)\wedge\forall v_1(v_1\cdot v_1\equiv 1)$，$t=v_3\cdot v_1$，

则 $\varphi(v_1/t)=\forall v_2(v_3\cdot v_1+v_2\equiv v_2+v_3\cdot v_1)\wedge\forall v_1(v_1\cdot v_1\equiv 1)$.

我们称项 **t 相对于 x 在公式 φ 中自由**，如果 t 中每个变元在 $\varphi(x/t)$中被代入后的出现都不受约束。上例中 t 相对于 v_1 在$\varphi(v_1)$中是自由的，但如果$t=v_2$，则 t 不再相对于 v_1 在上例的 φ 中自由。

我们定义的一阶语言是含有符号“$\equiv$”作为逻辑符号的，因此称为具有等号的一阶语言。

而通常的符号“$=$”则看成是形式语言之外的元语言符号。我们常用 $t=v_1$，$\varphi=\forall v_1(v_1+v_2\equiv v_2+v_1)$，其中“$=$”表示“就是”或“是”的意思。而逻辑符号“$\equiv$”到现在为止我们还只是把它看成一个形式符号。

设 $\mathscr{L}$ 是一个一阶形式语言，$\mathscr{L}$ 中全体逻辑符号和非逻辑符号的集合的基数记作 $\|\mathscr{L}\|$. 显然有 $\|\mathscr{L}\|\geqslant\omega$. 通过集合论简单的基数的计算容易知道：$\mathscr{L}$ 中的符号组成的有限长的符号串的全集的基数仍是 $\|\mathscr{L}\|$. 由于 $\mathscr{L}$ 的每个公式都是 $\mathscr{L}$ 中符号的有限长的串，$\mathscr{L}$ 的所有公式组成的集合的势一定不大于 $\|\mathscr{L}\|$. 另一方面，对 $\mathscr{L}$ 中每个变元 x，$x\equiv x$ 是 $\mathscr{L}$ 的公式，对 $\mathscr{L}$ 中每个非逻辑符号，也容易构成 $\mathscr{L}$ 的至少一个公式，这样 $\mathscr{L}$ 的所有公式的集合的势应当不少于 $\|\mathscr{L}\|$. 合此两者，我们有 $\mathscr{L}$ 的所有公式的集合的势是 $\|\mathscr{L}\|$. 我们再来看 $\mathscr{L}$ 的所有句子组成的集合的势，由每个句子都是一个公式知句子集的势不大子公式集的势

$\|\mathscr{L}\|$. 而我们知道，每个公式都可以通过增加量词而得到句子，不同的公式得到的当然是不同的句子。这样，句子集的势也不小于公式集的势。合此两者，我们又得到 $\mathscr{L}$ 的所有句子集的势也是 $\|\mathscr{L}\|$. 这样 $\|\mathscr{L}\|$ 就同时表示 $\mathscr{L}$ 中所有符号组成的集的基数，$\mathscr{L}$ 中所有公式的集合的基数和 $\mathscr{L}$ 中所有句子的集合的基数。

5. 一阶逻辑公理

设 $\mathscr{L}$ 是一阶语言，$\mathscr{L}$ 的公理系统中有三组公理：

（甲）命题公理。设 φ, ψ, τ 是 $\mathscr{L}$ 的任意公式，以下三种公式都是公理：

$Ax1$ $\varphi\to\psi\to\varphi$

$Ax2$ $(\varphi\to\psi\to\tau)\to(\varphi\to\psi)\to\varphi\to\tau$

$Ax3$ $(\neg\varphi\to\neg\psi)\to\psi\to\varphi$

（乙）量词公理。设 φ, ψ 是 $\mathscr{L}$ 的任意公式，x 是 $\mathscr{L}$ 的任意个体变元，则以下两种公式都是公理：

$Ax4$ $\forall x(\varphi\to\psi)\to\varphi\to\forall x\psi$，$x$ 不在 φ 中自由出现；

$Ax5$ $\forall x\varphi(x)\to\varphi(x/t)$，$t$ 相对于 x 在 φ 中自由。

（丙）等词公理。设 t，t_1，t_2，……是 $\mathscr{L}$ 的项，R 是 $\mathscr{L}$ 的 n 元关系符号，F 是 $\mathscr{L}$ 的 m 元函数符号，则以下三种公式都是公理：

$Ax6$ $t\equiv t$

$Ax7$ $t_1\equiv t_{n+1}\to\cdots\to t_n\equiv t_{2n}\to R(t_1\cdots t_n)\to R(t_{n+1}\cdots t_{2n})$

$Ax8$ $t_1\equiv t_{m+1}\to\cdots\to t_m\equiv t_{2m}\to F(t_1\cdots t_m)\equiv F(t_{m+1}\cdots t_{2m})$

6. 推演规则

（1）**分离法则** MP. 由 φ 和 $\varphi\to\psi$ 得 ψ；

（2）**概括法则** G. 由 φ 得 $\forall x\varphi$.

有时，我们也称 G 为**推广法则**。

练习

2.1.1 用一阶形式语言写出描述下列命题的公式：

(1) $R(v)$ 是个一元关系，至少有两个元素满足 R；

(2) $P(x, y)$ 是二元关系，对每个 x 都有一个 y 满足关系 $P(x, y)$，并且没有一个 y，使每个 x 都满足 $P(x, y)$；

(3) 每个大于 1 的数都有一个小于 1 的倒数.

2.1.2 令 $\mathscr{L}=\{+, \cdot, \leqslant, 0, 1\}$，在 $\mathscr{L}$ 中写出描述下列命题的公式：

(1) 加法和乘法满足结合律不满足交换律；

(2) 任意一个数的平方大于 0，则这个数不等于 0；

(3) 任意两个数都能比较大小；

(4) 0 是加法单位元，1 是乘法单位元。

2.1.3 公式 $\forall v_1 R(v_1, v_2)$ 中哪个变元是自由变元？公式 $\forall v_1 R(v_1, v_2) \to \forall v_2 R(v_1, v_2)$ 中哪个变元是自由出现，哪个变元是约束出现？

2.1.4 项 $F(v_1, v_2)$ 相对于 v_1 在公式 $\exists v_2 P(v_1, v_2)$ 中是否自由？$F(v_1, v_2)$ 相对于 v_1 在公式 $\forall v_1 R(v_1) \to \exists v_3 P(v_1, v_3)$ 中是否自由？

2.1.5 设 $\varphi(x)$ 是 $\mathscr{L}$ 的一个公式，x 相对于 x 是否在 $\varphi(x)$ 中自由？

2.1.6 设变元 y 相对于 x 在 $\varphi(x)$ 中自由，x 相对于 y 在 $\varphi(x/y)$ 中是否自由？在 $\varphi(x/y)$ 中再用 x 代换自由出现的 y 是否仍得 $\varphi(x)$？

2.1.7 设 y 在 $\varphi(x)$ 中不出现，y 相对于 x 是否自由？x 代换在 $\varphi(x/y)$ 自由出现的 y 得到的公式是什么？

2.1.8 设 t 是 $\mathscr{L}$ 的一个项，$\varphi(x)=(t \equiv x)$. $\varphi(x/t)$ 是否是 $t \equiv t$？要加什么限制才能使 $\varphi(x/t)=(t \equiv t)$？

§2.2 一阶逻辑形式推演

设φ是一阶语言$\mathscr{L}$的一个公式，如果$\mathscr{L}$中存在一个有限的公式序列φ_1，…，φ_n，$\varphi_n=\varphi$，在这个序列中，对每个$i\leqslant n$，φ_i或是一条公理，或是由它之前的公式经推演规则得到的公式，就称φ是$\mathscr{L}$的一条**定理**，记作$\vdash\varphi$，称序列φ_1，…，φ_n是从公理出发到φ的一个**证明**，或简称为φ的一个证明。显然每条公理都是一个定理。

与命题逻辑一样，$\mathscr{L}$中如有一个公式序列φ_1，…，$\varphi_n=\varphi$，每个φ_i或是公理，或是定理，或是由它之前的公式经推演规则得到，则φ也是$\mathscr{L}$的定理。由于命题逻辑的公理都是一阶逻辑$\mathscr{L}$的公理，命题逻辑的推演规则都是$\mathscr{L}$的规则，因此，我们把任何一个命题逻辑的定理中的命题变元符号代换成一阶逻辑$\mathscr{L}$中的公式就得到一阶逻辑的一条定理。

设Γ是一阶语言$\mathscr{L}$的一个公式集，φ是$\mathscr{L}$的一个公式，如果$\mathscr{L}$中有一个有限的公式序列φ_1，…，$\varphi_n=\varphi$，对每个$i\leqslant n$，φ_i或是$\mathscr{L}$的公理，或是Γ中的一个公式，或是由该序列中φ_i之前的公式经推演规则得到的公式，就称φ是Γ的一个**推论**，记作$\Gamma\vdash\varphi$。$\varphi_1,\cdots,\varphi_n$称为从$\Gamma$出发到$\varphi$的一个证明。如果$\Gamma=\{\psi_1,\ \cdots,\ \psi_m\}$是一个有限的公式集合，$\Gamma\vdash\varphi$也写作$\psi_1$，…，$\psi_m\vdash\varphi$.

定理 2.2.1 （一阶逻辑的**演绎定理**）设Γ是一阶语言$\mathscr{L}$的一个公式集，φ，ψ是$\mathscr{L}$的公式，如果$\Gamma,\varphi\vdash\psi$，并且在从$\Gamma\cup\{\varphi\}$出发到ψ的证明中没有对φ中的自由变元x用过推广法则，则$\Gamma\vdash\varphi\to\psi$.

证明 设φ_1，φ_2，…，$\varphi_n=\psi$是从$\Gamma\cup\{\varphi\}$出发到ψ的一个证明，对$k=1$，…，n归纳证明可以构造从Γ出发到$\varphi\to\varphi_k$的证明。

当$k=1$时，证明$\Gamma\vdash\varphi\to\varphi_1$. 依照定理1.1.2证明中的1.1，1.2和1.3，可以给出从Γ出发到$\varphi\to\varphi_1$的证明。

归纳假设对 $\varphi\to\varphi_1$，…，$\varphi\to\varphi_{k-1}$ 都已进行适当填补使之成为从 Γ 出发的证明。现在证明对 $\varphi\to\varphi_k$ 可以进行填补，使 $\Gamma\vdash\varphi\to\varphi_k$.

对 φ_k 是公理，$\varphi_k\in\Gamma$，$\varphi_k=\varphi$ 或 φ_k 是由 φ_i，φ_j，i、$j<k$ 经分离法则得到都可仿照定理 1.1.2 证明中的 2.1，2.2，2.3，2.4 进行适当填补，现在设 φ_k 是由 φ_i，$i<k$，经由推广法则 G 得到，即 $\varphi_k=\forall x\varphi_i$，$x$ 是某个体变元，由归纳假设对 $\varphi\to\varphi_i$ 已作好适当填补，我们继续填补如下

…

$\varphi\to\varphi_i$　　　　归纳假设

$\forall x(\varphi\to\varphi_i)$　　推广法则 G

(＊)　$\forall x(\varphi\to\varphi_i)\to(\varphi\to\forall x\varphi_i)$　$Ax4$

$\varphi\to\forall x\varphi_i$　　　上二式经 MP

最后一式即 $\varphi\to\varphi_k$. 由题设 φ_1，…，φ_n 中没有对 φ 的自由变元用过推广法则，然而由 φ_i 经推广法则 G 得到 $\varphi_k=\forall x\varphi_i$，$x$ 当然不是 φ 的自由变元。这样（＊）是 $Ax4$ 的一个公理。这样我们归纳地证明了对任意 $k\leqslant n$，$\varphi\to\varphi_k$ 都是 Γ 的推论。当然，有 $\Gamma\vdash\varphi\to\varphi_n$. ▌

定理 2.2.1 说明在一阶逻辑中应用演绎定理时要仔细考虑避免对前提条件中的自由变元用推广法则。当然，如果条件中的公式 φ 或甚至条件集 Γ 没有自由变元，都是句子，则演绎定理便总是成立的了。不难看出对假言三段论式 HS 的证明，不涉及推广法则，因此在一阶逻辑中是通行无阻的。

例 1　设 φ，ψ 是 $\mathscr{L}$ 的两个公式，x 不在 φ 中自由出现，则 $\vdash(\varphi\to\forall x\psi)\to\forall x(\varphi\to\psi)$.

证明　由演绎定理，我们只要证明 $\varphi\to\forall x\psi\vdash\forall x(\varphi\to\psi)$.

(1) $\varphi\to\forall x\psi$　　　前提条件

(2) $\forall x\psi\to\psi$　　　$Ax5$　x 对 x 相对自由

(3) $\varphi\to\psi$　　　　HS

(4) $\forall x(\varphi\to\psi)$　　G

注意到题设 x 不在 φ 中自由出现，而 x 在 $\forall x\psi$ 中当然是约束变元，因此 x 在前提条件 $\varphi\to\forall x\psi$ 中不自由出现，因此演绎定理可用。这样由 $\varphi\to\forall x\psi\vdash\forall x(\varphi\to\psi)$ 得 $\vdash(\varphi\to\forall x\psi)\to\forall x(\varphi\to\psi)$. ▌

例 2 设 φ,ψ 是 $\mathscr{L}$ 的任意两个公式，x 是 $\mathscr{L}$ 的任一变元，证明 $\vdash\forall x(\varphi\to\psi)\to\forall x\varphi\to\forall x\psi$.

证明 只要证 $\forall x(\varphi\to\psi)$，$\forall x\varphi\vdash\forall x\psi$

(1) $\forall x(\varphi\to\psi)$ 前提条件

(2) $\forall x(\varphi\to\psi)\to\varphi\to\psi$ $Ax5$ x 相对于 x 在 $\varphi\to\psi$ 中自由

(3) $\varphi\to\psi$ (1)，(2) MP

(4) $\forall x\varphi$ 前提

(5) $\forall x\varphi\to\varphi$ $Ax5$

(6) φ (4)，(5) MP

(7) ψ (6)，(3) MP

(8) $\forall x\psi$ G

注意到 x 不是两个前提 $\forall x(\varphi\to\psi)$ 和 $\forall x\psi$ 中的自由变元，由 $\forall x(\varphi\to\psi)$，$\forall x\varphi\vdash\forall x\psi$ 经演绎定理可得 $\forall x(\varphi\to\psi)\vdash\forall x\varphi\to\forall x\psi$，再用演绎定理就得到 $\vdash\forall x(\varphi\to\psi)\to\forall x\varphi\to\forall x\psi$. ▌

例 3 设 $\varphi(x)$ 是 $\mathscr{L}$ 的一个公式，t 是 $\mathscr{L}$ 的一个项，t 相对于 x 在 φ 中自由，则 $\vdash\varphi(x/t)\to\exists x\varphi(x)$.

证明 (1) $\vdash\forall x\neg\varphi(x)\to\neg\varphi(x/t)$ $Ax5$，t 相对 x 在 φ 中自由

(2) $\vdash(\forall x\neg\varphi(x)\to\neg\varphi(x/t)\to\neg\forall x\neg\varphi(x))$ 命题演算恒真式

(3) $\vdash\varphi(x/t)\to\neg\forall x\neg\varphi(x)$ (1)，(2) MP

(3) 式即 $\vdash\varphi(x/t)\to\exists x\varphi(x)$. ▌

例 3 中没有用演绎定理，所给的证明是从公理出发的，因此每个公式都用了定理符号。

例 4 设 t 是 $\mathscr{L}$ 的任意一个项，变元 x 不在 t 中出现，则

$\vdash \exists x(t\equiv x)$.

证明 设 $\varphi(x)=t\equiv x$，易见 t 相对于 x 在 $\varphi(x)$ 中自由，又由 t 中不含 x，因此 $\varphi(x/t)=t\equiv t$. 即用 t 去代换 $t\equiv x$ 中所有的 x 时得到 $t\equiv t$.

(1) $\vdash t\equiv t\to\exists x(t\equiv x)$ 例 3

(2) $\vdash t\equiv t$ $Ax6$

(3) $\vdash \exists x(t\equiv x)$ (1)，(2) MP ▎

例 5 设 $\varphi(x)$ 是 $\mathscr{L}$ 的一个公式，y 是 $\mathscr{L}$ 的个体变元，y 在 $\varphi(x)$ 中不出现．则

$\vdash \forall x\varphi(x)\leftrightarrow\forall y\varphi(x/y)$

证明 先证 $\vdash \forall x\varphi(x)\to\forall y\varphi(x/y)$.

(1) $\vdash \forall x\varphi(x)\to\varphi(x/y)$ $Ax5$ 由 y 在 $\varphi(x)$ 中不出现知 y 相对 x 在 φ 中自由

(2) $\vdash \forall y(\forall x\varphi(x)\to\varphi(x/y))$ G

(3) $\vdash \forall y(\forall x\varphi(x)\to\varphi(x/y))\to\forall x\varphi(x)\to\forall y\varphi(x/y)$ 例 1

(4) $\vdash \forall x\varphi(x)\to\forall y\varphi(x/y)$ (2)，(3) MP

由 y 在 $\varphi(x)$ 中不出现，y 在 $\forall x\varphi(x)$ 中不出现，以上证明中，(3) 式满足例 1 条件，又由于 y 在 $\varphi(x)$ 中不出现，易见 $\varphi(x/y)(y/x)=\varphi(x)$，即把 $\varphi(x)$ 中自由变元 x 换成 y 再把 y 换成 x 仍得到 $\varphi(x)$.（注意如果 $\varphi(x)$ 中有 y 出现，则两次代换后不一定回到 $\varphi(x)$）把上例证明中的 x、y 互换后重复一次：

(1′) $\vdash \forall y\varphi(x/y)\to\varphi(x/y)(y/x)$ $Ax5$ x 相对 y 在 $\varphi(x/y)$ 中自由

(2′) $\vdash \forall x(\forall y\varphi(x/y)\to\varphi(x))$ G

(3′) $\vdash \forall x(\forall y\varphi(x/y)\to\varphi(x))\to(\forall y\varphi(x/y)\to\forall x\varphi(x))$ 例 1

(4′) $\vdash \forall y\varphi(x/y)\to\forall x\varphi(x)$ (2)，(3) MP

由于 $\varphi(x/y)$ 中已用 y 代换了所有自由出现的 x，x 当然不在 $\varphi(x/y)$ 中自由出现，因此 (3′) 是满足例 1 条件的。合 (4) (4′)

两式可得到$\vdash \forall x\varphi(x) \leftrightarrow \forall y\varphi(x/y)$. ▎

仔细考察例 5 的证明可以看出，y 不在 $\varphi(x)$ 中出现这一条件可以减弱为 y 不在 $\varphi(x)$ 中自由出现且 x 的自由出现不在 y 的辖域之中。

命题 2.2.2 设 Γ 是 $\mathscr{L}$ 的公式集，$\varphi(x)$ 是 $\mathscr{L}$ 的一个公式，c 是 $\mathscr{L}$ 的一个常量，c 不在 Γ 和 φ 中出现。如果$\Gamma \vdash \varphi(x/c)$，则 $\Gamma \vdash \forall x\varphi(x)$.

证明 不妨设从 Γ 出发到$\varphi(x/c)$的一个证明是$\varphi_1(c)$，$\varphi_2(c)$，…，$\varphi_n(c)=\varphi(x/c)$. 对每个 $i \leqslant n$，c 不一定在 $\varphi_i(c)$ 中出现，由于 φ_1，…，φ_n 有限长，我们可以找到一个不在其中出现的个体变元 y，用 y 代换这个序列中所有的 c，得到一个新的序列 $\varphi_1(c/y)$，…，$\varphi_n(c/y)=\varphi(x/y)$，对每个 $i \leqslant n$，如果 $\varphi_i(c)$ 是 $\mathscr{L}$ 的公理，则$\varphi_i(c/y)$ 也是公理，如果 $\varphi_n(c) \in \Gamma$，则 c 在 φ_i 中不出现，$\varphi_i(c/y)=\varphi_i \in \Gamma$. 如果$\varphi_i(c)$是由这个序列中前两个式子经分离法则 MP 得到，则 $\varphi_i(c/y)$也能经这两个式子的变换式经分离法则 MP 得到。如果 $\varphi_i(c)$是由序列中某公式经推广法则 G 得到，则 $\varphi_i(c/y)$ 也可以经这个公式的变换式经推广法则 G 得到。这样新的序列也是从 Γ 出发的一个证明。现在我们继续填补这个序列。

…

$\varphi(x/y)$

$\forall y\varphi(x/y)$　　G

$\forall y\varphi(x/y) \rightarrow \forall x\varphi(x)$　例 5 一个方向

$\forall x\varphi(x)$　　上二式 MP

于是我们得到由 Γ 出发到$\forall x\varphi(x)$ 的一个证明，因此有 $\Gamma \vdash \forall x\varphi(x)$. ▎

为了使定理的推演更方便，我们需要如下命题：

命题 2.2.3 设 Γ 是 $\mathscr{L}$ 的公式集，φ是 $\mathscr{L}$ 的公式.

(1) $\Gamma \vdash \varphi$当且仅当存在有限子集$\{\varphi_1, \cdots, \varphi_k\} \subset \Gamma$使

$\varphi_1, \cdots, \varphi_n \vdash \varphi$;

(2) $\Gamma, \varphi \vdash \psi$, $\Gamma \vdash \varphi$, 则 $\Gamma \vdash \psi$;

(3) 设 Γ' 是 $\mathscr{L}$ 的公式集，如果 $\Gamma \cup \Gamma' \vdash \varphi$ 且 $\Gamma \vdash \Gamma'$，即对任意公式 $\psi \in \Gamma'$ 有 $\Gamma \vdash \psi$，则 $\Gamma \vdash \varphi$;

(4) 设 $\Gamma \vdash \Gamma'$，$\Gamma' \vdash \varphi$，则 $\Gamma \vdash \varphi$.

证明 (1) 由从 Γ 出发到 φ 的证明只是一个有限序列，容易看出是显然的.

(2) 设 $\Gamma, \varphi \vdash \psi$，$\Gamma \vdash \varphi$，则存在从 Γ，φ 出发的一个证明 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n = \psi$，也存在从 Γ 出发的一个证明 $\psi_1 \cdots \psi_m = \varphi$。对每个 $\varphi_i = \varphi$ 都用第二个序列代换第一个序列中的 φ_i，就可得到从 Γ 出发到 ψ 的一个证明.

(3) 由 $\Gamma \cup \Gamma' \vdash \varphi$ 知存在一个从 $\Gamma \cup \Gamma'$ 出发的证明 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n = \varphi$，对每个 φ_i，如果 $\varphi_i \in \Gamma'$，则用从 Γ 出发到 φ_i 的一个证明去代换序列中的 φ_i，就得到从 Γ 出发到 φ 的一个证明.

(4) 由 $\Gamma' \vdash \varphi$，自然有 $\Gamma \cup \Gamma' \vdash \varphi$，因此 (4) 是 (3) 的特例.

▌

设 φ, ψ 是 $\mathscr{L}$ 的两个公式，如果 $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$，则称 φ, ψ 是**逻辑等价**的。由命题演算，$\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ 当且仅当 $\vdash \varphi \rightarrow \psi$ 且 $\vdash \psi \rightarrow \varphi$. 一阶逻辑中极为重要的问题就是判断两个公式是否逻辑等价。

命题 2.2.4 设公式 φ 和 ψ 逻辑等价，ψ 和 τ 逻辑等价，则 φ 和 τ 逻辑等价。

证明 由 φ 和 ψ，ψ 和 τ 逻辑等价，有 $\vdash \varphi \rightarrow \psi$，$\vdash \psi \rightarrow \tau$，由假言三段论式 HS，有 $\vdash \varphi \rightarrow \tau$，同样也可证明有 $\vdash \tau \rightarrow \varphi$，因此 $\vdash \varphi \leftrightarrow \tau$，即 φ 与 τ 逻辑等价。 ▌

命题 2.2.4 说明等价公式有传递关系。在证明若干公式互相逻辑等价的时候，就可以简化证明。等价公式的自反性和对称性是显然的，因此，逻辑等价是公式之间的等价关系。

称公式 ψ 是 φ 的**子公式**，归纳定义如下：

(1) φ是φ的子公式;

(2) 如果ψ是φ_1的子公式,则ψ是$\neg\varphi_1$的子公式,也是$\varphi_1\to\varphi_2$, $\varphi_2\to\varphi_1$, $\forall x\varphi_1$的子公式。

设φ是$\mathscr{L}$的一个公式,ψ是φ的一个子公式,用$\mathscr{L}$中另一个公式ψ'代换φ中某一处子公式ψ可得到$\mathscr{L}$的另一个公式,当然用ψ'代换φ中某几处子公式ψ也可得到$\mathscr{L}$的一个公式。

命题 2.2.5 设ψ是公式φ的一个子公式,公式ψ'与ψ逻辑等价,ϕ是用ψ'代换φ中一处或几处子公式ψ后得到的公式,则φ与ϕ逻辑等价。

证明 对φ的复杂性归纳。如果$\psi=\varphi$,则$\phi=\psi'$,显然有ϕ与φ逻辑等价。设ψ是φ的真子公式,即$\psi\neq\varphi$.

如果ψ是$\neg\varphi_1$的子公式,则ψ是φ_1的子公式,归纳假设φ_1中的一处或几处ψ被ψ'代换后得到ϕ_1与φ_1逻辑等价,即$\vdash\varphi_1\leftrightarrow\phi_1$,易见$\vdash\neg\phi_1\leftrightarrow\neg\varphi_1$,即$\vdash\phi\leftrightarrow\varphi$.

设ψ是$\varphi_1\to\varphi_2$的子公式,φ_1,φ_2中的若干处ψ经代换ψ'后得ϕ_1,ϕ_2,归纳假设$\vdash\varphi_1\leftrightarrow\phi_1$,$\vdash\varphi_2\leftrightarrow\phi_2$,也不难证明$\vdash(\varphi_1\to\varphi_2)\leftrightarrow(\phi_1\to\phi_2)$,只须注意到

$$\vdash(\varphi_1\leftrightarrow\phi_1)\to(\varphi_2\leftrightarrow\phi_2)\to(\varphi_1\to\varphi_2)\leftrightarrow(\phi_1\to\phi_2)$$

是命题演算恒真式,它就是一阶逻辑的定理。两次运用分离法则就得到$\vdash(\varphi_1\to\varphi_2)\leftrightarrow(\phi_1\to\phi_2)$.

设ψ是$\forall x\varphi_1$的子公式,φ_1中若干处子公式ψ被ψ'代换得ϕ_1,归纳假设$\vdash\varphi_1\leftrightarrow\phi_1$. 由$\vdash(\varphi_1\to\phi_1)$用推广法则G得到$\vdash\forall x(\varphi_1\to\phi_1)$,由例2有$\vdash\forall x(\varphi_1\to\phi_1)\to(\forall x\varphi_1\to\forall x\phi_1)$,经分离法则$MP$得到$\vdash\forall x\varphi_1\to\forall x\phi_1$。同样可得$\vdash\forall x\phi_1\to\forall x\varphi_1$. 因此有$\vdash\forall x\varphi_1\leftrightarrow\forall x\phi_1$,即$\vdash\varphi\leftrightarrow\phi$.

这样完成归纳,对任意公式φ有$\vdash\varphi\leftrightarrow\phi$. ∎

命题 2.2.5 告诉我们在证明两个公式逻辑等价的时候,可以把一个公式的子公式用它的等价公式来代换。下面我们给出几个

常用的例子。

例 6 (i) $\vdash\forall x(\varphi\to\psi)\leftrightarrow(\varphi\to\forall x\psi)$，$x$ 不在 φ 中自由出现；

(ii) $\vdash\forall x(\varphi\to\psi)\leftrightarrow(\exists x\varphi\to\psi)$，$x$ 不在 ψ 中自由出现；

(iii) $\vdash\exists x(\varphi\to\psi)\leftrightarrow(\varphi\to\exists x\psi)$，$x$ 不在 φ 中自由出现；

(iv) $\vdash\exists x(\varphi\to\psi)\leftrightarrow(\forall x\varphi\to\psi)$，$x$ 不在 ψ 中自由出现。

证明 (i) 由 $Ax5$ 和例 1 即得。我们来证明 (ii) 而把 (iii) (iv) 的证明留给读者。

(2.1) 先证$\vdash\forall x(\varphi\to\psi)\to(\exists x\varphi\to\psi)$.

我们来证明 $\forall x(\varphi\to\psi),\neg\psi\vdash\forall x\neg\varphi$.

(1′)	$\forall x(\varphi\to\psi)$	假设
(2′)	$\varphi\to\psi$	(1′) 和 $Ax5$ 经 MP
(3′)	$(\varphi\to\psi)\to(\neg\psi\to\neg\varphi)$	命题演算恒真式
(4′)	$(\neg\psi\to\neg\varphi)$	(2′)，(3′) MP
(5′)	$\neg\psi$	假设
(6′)	$\neg\varphi$	(4′)，(5′) MP
(7′)	$\forall x\neg\varphi$	G

这样我们证明了$\forall x(\varphi\to\psi),\neg\psi\vdash\forall x\neg\varphi$. 由于 x 不在 ψ 中自由出现，可以用演绎定理得到

$\vdash\forall x(\varphi\to\psi)\to(\neg\psi\to\forall x\neg\varphi)$。

又$\vdash(\neg\psi\to\forall x\neg\varphi)\to(\neg\forall x\neg\varphi\to\psi)$是命题演算恒真式，由 HS 有

$\vdash\forall x(\varphi\to\psi)\to(\neg\forall x\neg\varphi\to\psi)$，

即 $\vdash\forall x(\varphi\to\psi)\to(\exists x\varphi\to\psi)$。

(2.2) 再证 $\vdash(\exists x\varphi\to\psi)\to\forall x(\varphi\to\psi)$.

(1) $\exists x\varphi\to\psi$ 假设

(2) $\varphi\to\exists x\varphi$ 例 3 x 相对于 x 在 φ 中自由

(3) $\varphi\to\psi$ (2)，(1) HS

(4) $\forall x(\varphi\to\psi)$ G

这样得到$\exists x\varphi\to\psi\vdash\forall x(\varphi\to\psi)$. 证明中只对 x 用到一次推广法则，

而 x 不在 ψ 中自由出现，当然也不在 $\exists x\varphi\to\psi$ 中自由出现，可用演绎定理得 $\vdash(\exists x\varphi\to\psi)\to\forall x(\varphi\to\psi)$.

合 (2.1) (2.2) 得 $\vdash\forall x(\varphi\to\psi)\leftrightarrow(\exists x\varphi\to\psi)$. ▌

从例 6 中我们看到可以把蕴涵式中的量词提前到公式的最前面，只要变元不在另一式中自由出现。结合例 5 我们得到公式的前束标准形。一个公式如果没有量词，或其量词都在最前面，则称这个公式为**前束标准形公式**，也叫**前束范式**，形如 $Q_1x_1\cdots Q_nx_n\varphi$ 的公式，其中 Q_i 是 $\forall$ 或 $\exists$，φ 中没有量词，这就是前束标准形公式。如果一个前束标准形公式的量词以 $\forall$，$\exists$ 分组有 n 组交叉出现，若最前面的量词是 $\forall$，则称这个公式是 Π_n 形公式，最前面的量词是 $\exists$，则称其为 Σ_n 形公式，例如 $\forall x_1\forall x_2\exists y_1\forall x_3\varphi$. 如果 φ 中无量词，则这是一个 Π_3 形公式，而 $\exists x_1\exists x_2\forall y_1\ \forall y_2\forall y_3\varphi$，如 φ 中没量词，则是 Σ_2 形公式。

定理 2.2.6 $\mathscr{L}$ 的每个公式 φ 都可以有效地把它化为与之逻辑等价的前束标准形公式。

证明 对 φ 的复杂性归纳。设 φ 没有量词，刚 φ 已经是前束标准形。

设 $\varphi=\neg\psi$，归纳假设 ψ 可有效地化为前束标准形 $Q_1x_1\cdots Q_nx_n\psi_1$ 与 ψ 逻辑等价，ψ_1 中无量词，则由命题 2.2.5，φ 与 $\neg Q_1x_1\cdots Q_nx_n\psi_1$ 逻辑等价。由练习 2.2.5 后式与 $Q_1'x_1\cdots Q_n'x_n\neg\psi_1$ 等价，其中 Q_i' 由 Q_i 决定，如果 Q_i 是 $\forall$，则 Q_i' 是 $\exists$，Q_i 是 $\exists$，则 Q_i' 是 $\forall$. 由 $\neg\psi_1$ 没有量词知 $Q_1'x_1\cdots Q_n'x_n\neg\psi_1$ 是前束标准形。

设 $\varphi=\psi_1\to\psi_2$，ψ_1，ψ_2 分别有效地化成前束标准形 $Q_1x_1\psi_1'$ 和 $Q_2x_2\psi_2'$，取不在 φ 中出现的变元符号 y_1，y_2，由例 5 和练习 2.2.4 有 $Q_1x_1\psi_1'\leftrightarrow Q_1y_1\psi_1'(x_1/y_1)$，$Q_2x_2\psi_2'\leftrightarrow Q_2y_2\psi_2'(x_2/y_2)$. 现在由命题 2.2.5，$\varphi$ 逻辑等价于 $Q_1y_1\psi_1'\leftrightarrow Q_2y_2\psi_2'$，再由例 6 可以进行如下等价变换：

$$\vdash(Q_1y_1\psi_1'\to Q_2y_2\psi_2')\leftrightarrow Q_2y_2(Q_1y_1\psi_1'\to\psi_2')$$

$\vdash (Q_1 y_1 \psi_1' \to \psi_2') \leftrightarrow Q_1' y_1 (\psi_1' \to \psi_2')$

这样由命题 2.2.5，φ 与 $Q_2 y_2 Q_1' y_1$ ($\psi_1' \to \psi_2'$) 逻辑等价，这里 Q_1' 是与 Q_1 相异的量词。而 ψ_1' 与 ψ_2' 仍然是前束标准形，可以重复这个过程把量词提前，最后得到与 φ 逻辑等价的前束标准形。

设 $\varphi = \forall x\psi$，归纳假设 ψ 可以有效地化成与之等价的前束标准形 ψ'，则 φ 与 $\forall x\psi'$ 逻辑等价，易见 $\forall x\psi'$ 是前束标准形。

至此归纳完成。因此对任何一个公式 φ 都可以有效地化为前束标准形。 ▌

事实上，定理 2.2.6 给出了一种程序，按这种程序可以有效地把一个公式化为前束标准形。需要指出的是最好先把所有的变元进行必要的代换，使公式中的任一变元不至受被提前的别的量词的约束。

例 7 求与公式 $\forall v_1 R(v_1) \to (\exists v_2 P(v_1, v_2) \to \forall v_1 P(v_2, v_1))$ 逻辑等价的前束标准形公式。

解 令 $\varphi_1 = (\forall v_1 R(v_1) \to (\exists v_2 P(v_1, v_2) \to \forall v_1 P(v_2, v_1)))$

$\varphi_2 = (\forall v_3 R(v_3) \to (\exists v_4 P(v_1, v_4) \to \forall v_5 P(v_2, v_5)))$

$\varphi_3 = (\forall v_3 R(v_3) \to \forall v_4 \forall v_5 (P(v_1, v_4) \to P(v_2, v_5))))$

$\varphi_4 = \exists v_3 \forall v_4 \forall v_5 (R(v_3) \to (P(v_1, v_4) \to P(v_2, v_5)))$

由命题 2.2.5、例 5、例 6 可知 φ_1，φ_2，φ_3，φ_4 互相等价，因此 φ_4 是 φ_1 的逻辑等价的前束标准形。 ▌

我们知道每个公式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 可以通过对自由变元增加全称量词的办法化为句子 $\forall x_1 \cdots x_n \varphi(x_1, \cdots, x_n)$. 现在我们来看公式的推演和句子的推演之间的关系。为了书写简便，我们常以 $\forall x_1 \cdots x_n \varphi$ 表示 $\forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi$，以 $\exists x_1 \cdots x_n \varphi$ 表示 $\exists x_1 \cdots \exists x_n \varphi$.

命题 2.2.7 $\vdash \varphi(x_1 \cdots x_n)$ 当且仅当 $\vdash \forall x_1 \cdots x_n \varphi(x_1 \cdots x_n)$.

只要应用概括法则 G 和公理 $Ax5$ 的一个特例 $\vdash \forall x\varphi(x) \to \varphi(x)$，就可以容易地给出证明。但是要注意 $\varphi(x) \to \forall x \varphi(x)$ 却不是一阶逻辑的定理。直观上，当我们取 $\varphi(x)$ 是一个谓

词$R(x)$表示x是红色的，则$\forall xR(x)$是说任意一个x都是红色的，易见$R(x)\to\forall xR(x)$是一个不真的命题。它自然不应当是一阶逻辑的一个定理。严格的语义证明我们在第三章中将会看到。这里我们要说明，虽然有命题 2.2.7，但$\varphi(x_1\cdots x_n)$与$\forall x_1\cdots x_n\varphi(x_1\cdots x_n)$一般不是逻辑等价的，即$\nvdash\varphi(x_1\cdots x_n)\leftrightarrow\forall x_1\cdots x_n\varphi(x_1\cdots x_n)$

命题 2.2.8 设Γ是$\mathscr{L}$的公式集，$\Gamma'=\{\forall y_1\cdots y_m\varphi(y_1\cdots y_m)$：$\varphi(y_1\cdots y_m)\in\Gamma\}$，$\psi(x_1\cdots x_n)$是$\mathscr{L}$的一个公式，则$\Gamma\vdash\psi(x_1\cdots x_n)$当且仅当$\Gamma'\vdash\forall x_1\cdots x_n\psi(x_1\cdots x_n)$.

证明 设T_1,T_2是$\mathscr{L}$的两个公式集，用$T_1\vdash T_2$记T_2中的每个公式φ，都有$T_1\vdash\varphi$. 对$\mathscr{L}$的任何公式φ，由命题 2.2.7 有$\varphi\vdash\forall x_1\cdots x_n\varphi$，也有$\forall x_1\cdots x_n\varphi\vdash\varphi$. 这样由题设有$\Gamma\vdash\Gamma'$，也有$\Gamma'\vdash\Gamma$. 由命题 2.2.3（4），若有$\Gamma\vdash\psi(x_1\cdots x_n)$，则$\Gamma'\vdash\psi(x_1\cdots x_n)$. 再由$\psi\vdash\forall x_1\cdots x_n\psi$，就得到
$\Gamma'\vdash\forall x_1\cdots x_n\psi(x_1\cdots x_n)$。反之若有$\Gamma'\vdash\forall x_1\cdots x_n\psi(x_1\cdots x_n)$，由命题 2.2.3（4）也可得到$\Gamma\vdash\psi(x_1\cdots x_n)$. ▌

命题 2.2.8 说明一阶逻辑中公式的推演和句子的推演有一定的关系。对于句子的推演，演绎定理可以无条件使用，因此句子集在模型论中将作为重要的对象加以研究。

一阶语言$\mathscr{L}$的公式集Γ称为**不和谐的**，如果对$\mathscr{L}$的任意的公式φ都有$\Gamma\vdash\varphi$，反之，如果存在一个公式φ，使$\Gamma\nvdash\varphi$，则Γ称为**和谐公式集**。与命题逻辑一样，下列命题在一阶逻辑中也成立。

命题 2.2.9 设Γ是$\mathscr{L}$的一个公式集，Γ不和谐当且仅当存在一个公式φ，使$\Gamma\vdash\varphi\wedge\neg\varphi$.

命题 2.2.10 设Γ是$\mathscr{L}$的一个公式集，φ是$\mathscr{L}$的一个公式，$T\nvdash\varphi$当且仅当$T\cup\{\neg\varphi\}$和谐，$T\nvdash\neg\varphi$当且仅当$T\cup\{\varphi\}$和谐。

命题 2.2.11 设 Γ 是 $\mathscr{L}$ 的一个公式集，Γ 和谐当且仅当 Γ 的每个有限子集都和谐。

称 $\mathscr{L}$ 的一个公式集 Γ 是**极大和谐**公式集，如果 Γ 和谐，并且对任何公式集 Γ'、如果 $\Gamma' \supset \Gamma$，Γ' 和谐，则 $\Gamma = \Gamma'$。即 Γ 和谐并且没有真包含 Γ 的和谐公式集 Γ'，则 Γ 极大和谐。

命题 2.2.12 设 T 是 $\mathscr{L}$ 的极大和谐公式集，则

(1) 对 $\mathscr{L}$ 的任意公式 φ，$T \vdash \varphi$ 当且仅当 $\varphi \in T$；

(2) 对 $\mathscr{L}$ 的任意公式 φ，φ 或 $\neg\varphi$ 恰有一个属于 T；

(3) 对 $\mathscr{L}$ 的任意公式 φ，ψ，$\varphi \to \psi \in T$ 当且仅当 $\varphi \notin T$ 或 $\psi \in T$.

定理 2.2.13 (**Lindenbaum 定理**) 设 Γ 是 $\mathscr{L}$ 的一个和谐公式集，则存在极大和谐公式集 Γ'，$\Gamma' \supset \Gamma$.

命题 2.2.9 到定理 2.2.13 的证明与命题逻辑中相应的命题的证明完全一样，参见 §1.3. 如果把上述命题，定理中的公式，公式集换成句子和句子集，结论仍然是成立的。

练习

2.2.1 设 φ，ψ 是 $\mathscr{L}$ 的任意公式，证明

$\vdash \forall x(\varphi \to \psi) \to \exists x\varphi \to \exists x\psi$；

$\vdash \exists x(\varphi \to \psi) \to \varphi \to \exists x\psi$，$x$ 不在 φ 中自由出现；

$\vdash \exists x(\varphi \to \psi) \to \forall x\varphi \to \exists x\psi$，$x$ 不在 ψ 中自由出现。

2.2.2 设 φ，ψ 是 $\mathscr{L}$ 的任意公式，证明

$\vdash \forall x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$；

$\vdash \exists x(\varphi \wedge \psi) \to \exists x\varphi \wedge \exists x\psi$；

$\vdash \exists x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \exists x\varphi \wedge \psi$，$x$ 不在 ψ 中自由出现；

$\vdash \exists x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \varphi \wedge \exists x\psi$，$x$ 不在 φ 中自由出现；

$\vdash \forall x(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \forall x\varphi \vee \psi$，$x$ 不在 ψ 中自由出现；

$\vdash \forall x(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \varphi \vee \forall x\psi$，$x$ 不在 φ 中自由出现。

2.2.3 设 R 是 $\mathscr{L}$ 中任意二元关系符号，证明

$\vdash\forall v_1v_2R(v_1v_2)\to\forall v_1R(v_1,v_1)$；

$\vdash\exists v_1v_2R(v_1v_2)\leftrightarrow\exists v_2v_1R(v_1v_2)$；

$\vdash\exists v_1\forall v_2R(v_1v_2)\to\forall v_2\exists v_1R(v_1v_2)$；

$\vdash\forall v_1v_2R(v_1v_2)\leftrightarrow\forall v_2v_1R(v_1v_2)$.

2.2.4 设 φ 是 $\mathscr{L}$ 的任一公式，y 是不在 φ 中出现的自由变元，证明$\vdash\exists x\varphi(x)\leftrightarrow\exists y\varphi(x/y)$.

2.2.5 设 φ 是 $\mathscr{L}$ 的任一公式，x 是 $\mathscr{L}$ 的一个个体变元，证明$\vdash\forall x\varphi\leftrightarrow\neg\exists x\neg\varphi$，$\vdash\neg\forall x\varphi\leftrightarrow\exists x\neg\varphi$，$\vdash\neg\exists x\varphi\leftrightarrow\forall x\neg\varphi$.

2.2.6 求分别与下列公式逻辑等价的前束标准形公式。

(1) $(\forall x_1R(x_1x_2)\to\neg\exists x_2R(x_2))\to\forall x_1x_2R(x_1x_2)$；

(2) $\forall x_1(P(x_1)\to R(x_1x_2))\to\exists x_2P(x_2)\to\exists x_3R(x_2x_3)$；

(3) $\exists x_1R(x_1x_2)\to P(x_1)\to\neg\exists x_3R(x_1x_3)$.

2.2.7 求一个公式，使它逻辑等价于一个Π_3公式，也逻辑等价于 Σ_3 公式。

2.2.8 设△是 $\mathscr{L}$ 中逻辑等价于Π_2公式的全体句子的集合，证明△在合取下封闭，即对任意句子φ_1、$\varphi_2\in\triangle$，存在$\psi\in\triangle$，使$\vdash\varphi_1\wedge\varphi_2\leftrightarrow\psi$。同样，△也在折取下封闭。

如果△是 $\mathscr{L}$ 中逻辑等价于 Σ_2 公式的全体句子的集合，证明△也对合取和折取封闭。

如果Π_2，Σ_2 改为Π_n，Σ_n，证明上述结论仍然成立。

2.2.9 设 T 是极大和谐句子集，φ，ψ 是任意句子，则

$\varphi\wedge\psi\in T$ 当且仅当 $\varphi\in T$ 且 $\psi\in T$；$\varphi\vee\psi\in T$ 当且仅当 $\varphi\in T$ 或 $\psi\in T$.

2.2.10 设 φ, ψ 是 $\mathscr{L}$ 的两个公式，$\vdash\varphi$ 当且仅当$\vdash\psi$，是否有$\vdash\varphi\leftrightarrow\psi$?

2.2.11 证明 $\varphi(x_1\cdots x_n)\vdash\forall x_1\cdots x_n\varphi(x_1\cdots x_n)$，是否有$\vdash\varphi(x_1\cdots x_n)\to\forall x_1\cdots x_n\varphi\ (x\ldots x_n)$?

2.2.12 设 T_1，T_2 是 $\mathscr{L}$ 的两个句子集，$T_1\cup T_2$ 不和谐，证

明$\mathscr{L}$中存在一个句子φ，使$T_1 \vdash \varphi$，$T_2 \vdash \neg\varphi$.

2.2.13 证明命题2.2.9——2.2.12，并把其中的公式，公式集改成句子和句子集。

第三章　一阶逻辑的模型

§3.1　一阶逻辑模型的定义

设形式语言 $\mathscr{L}=\{\{R_i\}_{i\in I},\{F_j\}_{j\in J},\{c_k\}_{k\in K}\}$，$\mathscr{L}$ 的**模型**是一个四元序对：

$\mathscr{U}=\langle A,\{R_i^{\mathscr{U}}\}_{i\in I},\{F_j^{\mathscr{U}}\}_{j\in J},\{c_k^{\mathscr{U}}\}_{k\in K}\rangle.$

其中，A 是一个非空集合，称之为 $\mathscr{U}$ 的**论域**，对每个 $i\in I$，$R_i^{\mathscr{U}}$ 是 $\mathscr{L}$ 中对应的关系符号的解释。如果 R_i 是 $\mathscr{L}$ 的 n 元关系符号，则 $R_i^{\mathscr{U}}$ 是论域 A 上的 n 元关系，即 $R_i^{\mathscr{U}}\subseteq A^n$，对任意 n 个元素 a_1，…，$a_n\in A$，或 $(a_1\cdots a_n)\in R_i^{\mathscr{U}}$，或 $(a_1\cdots a_n)\notin R_i^{\mathscr{U}}$，前者我们称为 $R_i^{\mathscr{U}}(a_1\cdots a_n)$为真，或 $R_i^{\mathscr{U}}(a_1\cdots a_n)$ 成立；后者称为 $R_i^{\mathscr{U}}(a_1\cdots a_n)$ 不真，或不成立。

对每个 $j\in J$，$F_j^{\mathscr{U}}$ 是 $\mathscr{L}$ 中对应的函数符号 F_j 的解释，如果 F_j 是 $\mathscr{L}$ 的 m 元函数符号，则 $F_j^{\mathscr{U}}$ 是论域 A 上的 m 元函数。对任意 m 个元素 a_1，…，$a_m\in A$，存在唯一确定的元素 $a\in A$，使 $F_j^{\mathscr{U}}(a_1,\cdots,a_m)=a$.

对每个 $k\in K$，$c_k^{\mathscr{U}}$ 是论域 A 中一个指定的元素，$c_k^{\mathscr{U}}$ 称为 $\mathscr{L}$ 中对应的常量符号 c_k 的解释。

在不引起歧义的时候，为了简单，我们也常记 $\mathscr{L}$ 的模型为 $\mathscr{U}=\langle A,\{R_i\}_{i\in I},\{F_j\}_{j\in J},\{c_k\}_{k\in K}\rangle$，而对常用的一些有限语言，仍用习惯方式表示模型的论域，关系，函数和常量。

例如，形式语言 $\mathscr{L}_1=\{\leqslant\}$，$\mathscr{L}_2=\{\leqslant,+,\cdot,0\}$. 设 $\mathscr{U}=\langle N,\leqslant\rangle$，$\mathscr{B}=\langle R,\leqslant,+,\cdot,0\rangle$，其中 N 是**自然数集**，R 是**实数集**；$\leqslant$是通常的关系小于等于；$+$，$\cdot$，是加法和乘法；0 是普通的实数零，则 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{L}_1$ 的模型，$\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{L}_2$ 的模型。

对于同一个语言 $\mathscr{L}$，可以有许多不同的模型。甚至相同的论域，对 $\mathscr{L}$ 中关系，函数和常量符号解释不同，就得到不同的模型。例如，令 $\mathscr{C}=\langle N, \leq'\rangle$，这里$\leq'$是自然数集上大于等于关系，则 $\mathscr{C}$ 也是 $\mathscr{L}_1$ 的模型，而 $\mathscr{C}$ 与 $\mathscr{U}$ 不同。

下面我们给出几个直观的例子。

例 1 设 $\mathscr{L}=\varnothing$，即 $\mathscr{L}$ 中除了逻辑符号之外没有非逻辑符号，则以任意非空集合 A 作论域便作成 $\mathscr{L}$ 的论域。$A=\{a\}$ 单元集，或 A 是有限集，无限集等等都是 $\mathscr{L}$ 的模型。

例 2 设 $\mathscr{L}=\{P\}$，P 是一元关系符号。令 $A=\{a, b\}$ 是二个元素的集合，$U=\{a\}\subset A$，U 是 A 的一个子集，则$\mathscr{U}=\langle A, U\rangle$ 是 $\mathscr{L}$ 的模型，其中 A 是论域，U 是 P 在 $\mathscr{U}$ 中的解释。如果取 $U_1=\{b\}\subset A$，则 $\mathscr{U}_1=\langle A, U_1\rangle$ 也是 $\mathscr{L}$ 的一个模型。我们取 $\mathscr{B}=\langle Z, Z^+\rangle$，其中 Z 是**整数集**，Z^+是**正整数集**，$Z^+\subset Z$，是 Z 的子集，以 Z^+ 作 P 的解释，则 $\mathscr{B}$ 也是 $\mathscr{L}$ 的模型。

例 3 设 $\mathscr{L}=\{P, E\}$，P 是一元关系符号，E 是二元关系符号，取 $A=\{a,b,c\}$，$P=\{a,b\}\subset A$，$E=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle\}$，则 $E\subset A\times A$，E 是 A 上的一个二元关系，则 $\mathscr{U}=\langle A, P, E\rangle$ 是 $\mathscr{L}$ 的一个模型。其实在这个模型里 E 是 A 上一个等于关系。

例 4 设 $\mathscr{L}=\{S, 0\}$，S 是一元函数符号，0 是常量符号。令 $A=\{a\}$，S：$A\to A$ 是 A 上一个映射，$S(a)=a$，以 a 作常量 0 的解释，则 $\mathscr{U}=\langle A, S, a\rangle$ 是 $\mathscr{L}$ 的一个模型。令 $A=N$，对任意 $n\in N$，$S(n)=n+1$，以 1 解释 0，则 $\mathscr{U}=\langle N, S, 0\rangle$ 也是 $\mathscr{L}$ 的模型，其中 S 是自然数集上的**后继函数**。

例 5 令 $\mathscr{L}=\{P_1, P_2, \cdots\}$. 对任意 i，P_i 是一元关系符号。我们取 $A=\{a, b\}$，令 $P_i=\{a\}$，$i=2n$ 时，$P_i=\{b\}$，$i=2n+1$时，这样 $\mathscr{U}=\langle A, P_1, P_2\cdots\rangle$ 就是 $\mathscr{L}$ 的模型。如果取 $B=N$，对任意 i，$P_i=N-\{i\}$，则 $\mathscr{B}=\langle B, P_1, P_2\cdots\rangle$ 也是 $\mathscr{L}$ 的一个模型。

从以上这些例子我们看到，一阶逻辑的模型不再是命题变元

的集合，而是论域，论域上的函数，关系，常量作形式语言中相应符号的解释一起构成模型，当然比较地复杂得多了。

由形式语言，我们可以构造它的模型，如果给定一个数学模型，我们也可以确定相应的形式语言，比如对于群 G，G 中有一个乘法，有一个逆运算，有一个单位元，则 $\langle G, \cdot, -, e\rangle$ 是形式语言 $\mathscr{L}=\{\cdot, -, e\}$ 的模型。如果把逆运算看作是从乘法导出的，则 $\langle G, \cdot, e\rangle$ 是 $\mathscr{L}=\{\cdot, e\}$ 的模型。

设一个模型的论域是 A，A 的势 $|A|$ 也称为模型 $\mathscr{U}$ 的势。如果 $|A|=\omega$，就称 $\mathscr{U}$ 是**可数模型**；$|A|<\omega$，即 A 有限，就称 $\mathscr{U}$ 是**有限模型**；$|A|>\omega$，就称 $\mathscr{U}$ 是**不可数模型**。

以下给出形式语言的公式在模型中取真假值的**基本语义定义**。

从模型 $\mathscr{U}$ 的论域中任取一些元素构成的一个序列 $\sigma=\langle a_0, a_1, a_2, \cdots\rangle$ 称为 $\mathscr{U}$ 的**指派**，这就是说我们指派 A 中元素 a_0，a_1，a_2，…分别为语言 $\mathscr{L}$ 的个体变元 v_0，v_1，v_2，…在模型 $\mathscr{U}$ 中的解释。设 $b\in A$ 是 A 中一个元素，$n<\omega$，记 $\sigma(v_n|b)=\langle a_0, \cdots, a_{n-1}, b, a_{n+1}, \cdots\rangle$ 为 $\mathscr{U}$ 的另一个指派. $\sigma(v_n|b)$ 指派元素 b 为个体变元 v_n 的解释，而其他个体变元的解释都与指派 σ 的解释相同。

由模型的一个指派 σ，我们归纳地定义 $\mathscr{L}$ 中每个项在模型中的解释。

设 t_1，…，t_m 是 $\mathscr{L}$ 的项，t_1，…，t_m 在指派 σ 下的解释已知是 A 中元素 t_1^σ，…，t_m^σ。如果 t 是 $\mathscr{L}$ 的一个变元 v_i，则 $t^\sigma=a_i\in A$，如果 t 是 $\mathscr{L}$ 的某一常量 c；则 $t^\sigma=c^{\mathscr{U}}\in A$. 若 F_j 是 $\mathscr{L}$ 的 m 元函数符号；项 $F_j(t_1, \cdots, t_m)$ 在指派 σ 下的解释定义为

$$(F_j(t_1, \cdots, t_m))^\sigma=F_j^{\mathscr{U}}(t_1^\sigma, \cdots, t_m^\sigma)\in A.$$

现在我们可以归纳地定义 $\mathscr{L}$ 中公式 φ 在模型 $\mathscr{U}$ 中被指派 σ **满足**，或 φ 在 $\mathscr{U}$ 中在指派 σ 下**取值为真**，记作 $\mathscr{U}\models_\sigma\varphi$，**取值为假**记作 $\mathscr{U}\not\models_\sigma\varphi$.

(1)设φ是原子公式$t_1\equiv t_2$，t_1，t_2是项，$\mathscr{U}\models_\sigma\varphi$当且仅当$t_1^\sigma\equiv t_2^\sigma$；

(2) 设φ是原子公式$R_i(t_1, \cdots, t_n)$，其中R_i是$\mathscr{L}$的n元关系符号，t_1，…，t_n是项，

$\mathscr{U}\models_\sigma\varphi$当且仅当$R_i^{\mathscr{U}}(t_1^\sigma, \cdots, t_n^\sigma)$成立；

(3) 设$\varphi=\neg\psi$，$\mathscr{U}\models_\sigma\varphi$当且仅当$\mathscr{U}\not\models_\sigma\psi$；

(4) 设$\varphi=\psi_1\to\psi_2$，ψ_1，ψ_2是$\mathscr{L}$的公式，$\mathscr{U}\models_\sigma\varphi$当且仅当$\mathscr{U}\not\models_\sigma\psi_1$或$\mathscr{U}\models_\sigma\psi_2$；

(5)设$\varphi=\forall v_n\psi$，ψ是$\mathscr{L}$的公式，$\mathscr{U}\models_\sigma\varphi$当且仅当对任意元素$b\in A$，$\mathscr{U}\models_{\sigma(v_n|b)}\psi$.

在这个基本语义定义下，不难看出对$\mathscr{L}$的公式ψ_1，ψ_2，$\varphi=\psi_1\wedge\psi_2$时，$\mathscr{U}\models_\sigma\varphi$当且仅当$\mathscr{U}\models_\sigma\psi_1$且$\mathscr{U}\models_\sigma\psi_2$. $\varphi=\exists v_n\psi$时，$\mathscr{U}\models_\sigma\varphi$当且仅当存在元素$b\in A$，$\mathscr{U}\models_{\sigma(v_n|b)}\psi$.

例6 设$\mathscr{L}=\{P\}$，P是一元关系符号，取$\mathscr{U}=\langle A, P\rangle$是$\mathscr{L}$的一个模型，其中$A=\{a, b, c\}$，$P=\{a、b\}\subset A$，令$\varphi_1(v_1, v_2)=P(v_1)\wedge\neg P(v_2)$，$\varphi_2(v_1)=P(v_1)\to\forall v_2(v_1\not\equiv v_2\to P(v_2))$. 给定一个指派$\sigma=\langle a, b, c, a, a, \cdots\rangle$. 对这个指派有$v_1^\sigma=a$，$v_2^\sigma=b$，$v_3^\sigma=c$，$v_i^\sigma=a$，$i\geq 4$. 模型$\mathscr{U}$中，$P(a)$，$P(b)$成立，这样不难判定$\mathscr{U}\not\models_\sigma\varphi_1$，即$\varphi_1$取值为假。判定$\varphi_2$的取值要相对复杂一些，这是因为$\varphi_2$中有量词。先来判断有$\mathscr{U}\models_\sigma v_1\not\equiv v_2\to P(v_2)$，但$\mathscr{U}\not\models_{\sigma(v_2|c)}v_1\not\equiv v_2\to P(v_2)$. 这样$\mathscr{U}\not\models_\sigma\forall v_2(v_1\not\equiv v_2\to P(v_2))$，因此$\mathscr{U}\not\models_\sigma\varphi_2$.

一般我们计算一个公式的取值，总是先确定公式中自由变元的指派，再确定原子公式的取值，再确定量词所辖子公式的取值，最后用命题逻辑的取值方法或真值表方法计算公式的取值。

我们已经看到，公式在模型中的取值是由指派σ决定的，不同的指派可以使同一个公式取不同的值。但实际上，真正影响公式取值的只是对公式中出现的自由变元的解释，而其余变元的解释

是不起作用的。对于全称量词$\forall x$，我们要考虑论域中任意元素 a 作 x 的解释时，指派 $\sigma(x|a)$ 是否使公式都取值为真；对于存在量词$\exists x$，我们要考虑论域中是否存在元素 a，使 $\sigma(x|a)$ 是否使公式取值为真。对公式中不出现的变元，任意的解释都不在公式中出现，因此也不影响公式的取值。这样我们有：

命题 3.1.1 设 $\varphi(v_0\cdots v_n)$ 是 $\mathscr{L}$ 的一个公式，φ 中自由变元都在 v_0，…，v_n 中. 设 $\sigma_1=\langle a_0, a_1, \cdots a_n, \cdots\rangle$，$\sigma_2=\langle b_0, b_1, \cdots b_n, \cdots\rangle$，$a_0=b_0$，$a_1=b_1$，…，$a_n=b_n$，是模型 $\mathscr{U}$ 的两个指派，则 $\mathscr{U}\models_{\sigma_1}\varphi(v_0, \cdots, v_n)$ 当且仅当 $\mathscr{U}\models_{\sigma_2}\varphi(v_0, \cdots, v_n)$.

证明 先归纳证明在指派 σ_1，σ_2 下 $\mathscr{L}$ 的变元在 v_0，…，v_n 中的任意一个项 $t(v_0\cdots v_n)$ 在模型 $\mathscr{U}$ 中的解释都相同。

(1) 若项 $t(v_0\cdots v_n)$ 是个体变元 v_i，$i\leqslant n$，则 $v_i^{\sigma_1}=a_i$，$v_i^{\sigma_2}=b_i$，$i\leqslant n$，由 $a_i=b_i$ 知 $v_i^{\sigma_1}=v_i^{\sigma_2}$；

(2) 若项 $t(v_0\cdots v_n)$ 是某个常量 c_k，则项 $t(v_0\cdots v_n)$ 的解释都是 $c_k^{\mathscr{U}}$；

(3) 若项 $t(v_0\cdots v_n)=F_j(t_1, \cdots, t_m)$，其中 F_j 是 $\mathscr{L}$ 的 m 元函数符号，t_1，…，t_m 都是变元在 $v_0\cdots v_n$ 中的项，归纳假设 $t_1^{\sigma_1}=t_1^{\sigma_2}$，…，$t_m^{\sigma_1}=t_m^{\sigma_2}$. 则 $t^{\sigma_1}=(F_j(t_1\cdots t_m))^{\sigma_1}=F_j^{\mathscr{U}}(t_1^{\sigma_1}, \cdots, t_m^{\sigma_1})=F_j^{\mathscr{U}}(t_1^{\sigma_2}, \cdots, t_m^{\sigma_2})=t^{\sigma_2}$.

由 (1)，(2) 和 (3)，变元在 v_0，…，v_n 中的任一个项$t(v_0\cdots v_n)$ 在指派 σ_1，σ_2 下解释相同。现在对 $\varphi(v_0\cdots v_n)$ 的复杂性归纳证明命题成立。

(4) 设 $\varphi(v_0\cdots v_n)$ 是原子公式，$t_1(v_0\cdots v_n)\equiv t_2(v_0\cdots v_n)$.

$\mathscr{U}\models_{\sigma_1}\varphi(v_0\cdots v_n)$当且仅当 $t_1^{\sigma_1}(v_0\cdots v_n)\equiv t_2^{\sigma_1}(v_0\cdots v_n)$；

$\mathscr{U}\models_{\sigma_2}\varphi(v_0\cdots v_n)$当且仅当 $t_1^{\sigma_2}(v_0\cdots v_n)\equiv t_2^{\sigma_2}(v_0\cdots v_n)$.

由 (1)，(2) 和 (3) $t_1^{\sigma_1}=t_1^{\sigma_2}$，$t_2^{\sigma_1}=t_2^{\sigma_2}$，则

$\mathscr{U}\models_{\sigma_1}\varphi(v_0\cdots v_n)$ 当且仅当 $\mathscr{U}\models_{\sigma_2}\varphi(v_0\cdots v_n)$.

(5) 设 φ 是原子公式 $R_i(t_1, \cdots, t_m)$，R_i 是 $\mathscr{L}$ 的 m 元关系符

号，t_1，…，t_m 是变元在 $v_0 \cdots v_n$ 中的项，

$\mathscr{U} \models_{\sigma_1} R_i(t_1, \cdots, t_m)$ 当且仅当 $R_i^{\mathscr{U}}(t_1^{\sigma_1} \cdots t_m^{\sigma_1})$ 成立。由（1），（2）和（3）当且仅当 $R_i^{\mathscr{U}}(t_1^{\sigma_2} \cdots t_m^{\sigma_2})$ 成立，当且仅当 $\mathscr{U} \models_{\sigma_2} R_i(t_1 \cdots t_m)$.

（6）设 $\varphi(v_0 \cdots v_n) = \neg \psi(v_0 \cdots v_n)$，$\mathscr{U} \models_{\sigma_1} \varphi(v_0 \cdots v_n)$ 当且仅当 $\mathscr{U} \not\models_{\sigma_1} \psi(v_0 \cdots v_n)$，由归纳假设当且仅当 $\mathscr{U} \not\models_{\sigma_2} \psi(v_0 \cdots v_n)$，当且仅当 $\mathscr{U} \models_{\sigma_2} \varphi(v_0 \cdots v_n)$.

（7）设 $\varphi(v_0 \cdots v_n) = \psi_1(v_0 \cdots v_n) \rightarrow \psi_2(v_0 \cdots v_n)$，$\mathscr{U} \models_{\sigma_1} \varphi(v_0 \cdots v_n)$ 当且仅当 $\mathscr{U} \not\models_{\sigma_1} \psi_1(v_0 \cdots v_n)$ 或 $\mathscr{U} \models_{\sigma_1} \psi_2(v_0 \cdots v_n)$ 当且仅当 $\mathscr{U} \not\models_{\sigma_2} \psi_1(v_0 \cdots v_n)$ 或 $\mathscr{U} \models_{\sigma_2} \psi_2$ 当且仅当 $\mathscr{U} \models_{\sigma_2} \psi(v_0 \cdots v_n)$.

（8）设 $\varphi(v_0 \cdots v_n) = \forall v_k \psi(v_0 \cdots v_n v_k)$；$\mathscr{U} \models_{\sigma_1} \varphi(v_0 \cdots v_n)$ 当且仅当对任意 $b \in A$，$\mathscr{U} \models_{\sigma_1(v_k|b)} \psi(v_0 \cdots v_n v_k)$，当且仅当对任意 $b \in A$，$\mathscr{U} \models_{\sigma_2(v_k|b)} \psi(v_0 \cdots v_n v_k)$ 当且仅当 $\mathscr{U} \models_{\sigma_2} \varphi(v_0 \cdots v_n)$. 其中第二个当且仅当是由归纳假设对复杂度较小的公式 $\psi(v_0 \cdots v_n v_k)$，指派 $\sigma_1(v_k|b)$，$\sigma_2(v_k|b)$保持 ψ 中自由变元的解释一致，结论成立。

由以上（1）—（8）完成归纳证明，命题得证。▌

命题 3.1.1 说明公式 $\varphi(v_0 \cdots v_n)$ 在模型 $\mathscr{U}$ 中被满足，只与 v_0，…，v_n 的解释 a_0，…，a_n 有关，与 σ 指派的其余变元的解释无关。这样我们可以说公式 $\varphi(v_0 \cdots v_n)$ 在模型 $\mathscr{U}$ 中被 $a_0 \cdots a_n$ 满足，记作 $\mathscr{U} \models \varphi [a_0 \cdots a_n]$.

从命题 3.1.1 的证明还可以看出，$\mathscr{L}$ 中的项 $t(v_0 \cdots v_n)$ 的解释也由 $v_0 \cdots v_n$ 的解释 $a_0 \cdots a_n$ 完全确定，我们把它记作 $t(a_0 \cdots a_n)$，易见 $t(a_0 \cdots a_n) \in A$，是论域中的唯一确定的元素。类似于关系符号 R_i、函数符号 F_j 在模型 $\mathscr{U}$ 中的解释记作 $R_j^{\mathscr{U}}$，$F_j^{\mathscr{U}}$，有时也把项 $t(v_0 \cdots v_n)$ 在模型 $\mathscr{U}$ 中的解释记作 $t^{\mathscr{U}}(a_0 \cdots a_n)$.

现在我们可以对例 6 中公式 $\varphi_1(v_1, v_2)$，$\varphi_2(v_1)$ 的取值写成 $\mathscr{U} \not\models \varphi_1[a, b]$，$\mathscr{U} \models \varphi_1[a, c]$，$\mathscr{U} \not\models \varphi_2[a]$，而这些都可以直接由语义定义判断出来。

如果φ是$\mathscr{L}$的一个句子，φ中没有自由变元，由命题3.1.1，φ在模型中的取值与任何指派σ都无关. 这样φ在模型$\mathscr{U}$中，取值为真，如果有一个（任何一个）指派σ使$\mathscr{U}\models_\sigma\varphi$，我们可以记作$\mathscr{U}\models\varphi$。当$\mathscr{U}\models\varphi$时，我们就说$\mathscr{U}$满足$\varphi$，或$\varphi$在$\mathscr{U}$中成立，或称$\mathscr{U}$是$\varphi$的模型。

如果T是$\mathscr{L}$的一个句子集，对任何句子$\varphi\in T$，$\mathscr{U}\models\varphi$，则称$\mathscr{U}$是$T$的模型，$\mathscr{U}$满足$T$，或$T$在$\mathscr{U}$中被满足，记作$\mathscr{U}\models T$.

设φ是$\mathscr{L}$的一个公式，$\mathscr{U}$是$\mathscr{L}$的某一个模型，如果公式φ在模型$\mathscr{U}$的某一个指派σ下φ取值为真，即$\mathscr{U}\models_\sigma\varphi$，就称公式$\varphi$在$\mathscr{L}$中是可满足的。如果对$\mathscr{U}$的任意一个指派$\sigma$，都有$\mathscr{U}\models_\sigma\varphi$，就称$\varphi$在模型$\mathscr{U}$中**永真**，记作$\mathscr{U}\models\varphi$. 如果$\varphi$在$\mathscr{L}$的任意一个模型中都永真，就称$\varphi$是$\mathscr{L}$的**恒真式**，记作$\models\varphi$. 设$\Gamma$是$\mathscr{L}$的一个公式集，$\mathscr{U}$是$\mathscr{L}$的模型，如果对任意公式$\psi\in\Gamma$，都有$\mathscr{U}\models\psi$，就记作$\mathscr{U}\models\Gamma$，称$\Gamma$在$\mathscr{U}$中**永真**。设$\Gamma$是$\mathscr{L}$的公式集，$\varphi$是$\mathscr{L}$的一个公式，如果对$\mathscr{L}$的任意模型$\mathscr{U}$，$\mathscr{U}\models\Gamma$，就有$\mathscr{U}\models\varphi$，就记作$\Gamma\models\varphi$. 下面我们来看一阶逻辑的可靠性和和谐性。

命题 3.1.2 一阶逻辑的任何一条公理都是恒真式。

证明 (i) 先来看命题公理。

设φ, ψ, τ是$\mathscr{L}$的三个公式，无论φ, ψ, τ在$\mathscr{L}$的模型$\mathscr{U}$的指派σ下取什么值，由基本语义定义(3)，(4)与命题逻辑的语义定义(2)(3)完全相同，由命题1.2.1知$Ax1$，$Ax2$，$Ax3$在$\mathscr{U}$的指派σ下取值为真。由$\mathscr{U}$与σ的任意性，以及φ, ψ, τ的任意性知$Ax1$，$Ax2$，$Ax3$的任意一条公理都是恒真式。

(ii) 再来看量词公理。设φ, ψ是$\mathscr{L}$的二个公式，变元x不在φ中自由出现，则$\forall x(\varphi\to\psi)\to(\varphi\to\forall x\psi)$是$Ax4$的一条公理。设$\mathscr{U}$是$\mathscr{L}$的任意一个模型，$\sigma$是$\mathscr{U}$的任何一个指派。

(1) 如果$\mathscr{U}\not\models_\sigma\varphi$或$\mathscr{U}\models_\sigma\forall x\psi$，则$\mathscr{U}\models_\sigma\varphi\to\forall x\psi$，由基本语义定义(4)，有$\mathscr{U}\models_\sigma\forall x(\varphi\to\psi)\to(\varphi\to\forall x\psi)$

(2) 如果$\mathscr{U}\models_\sigma\varphi$且$\mathscr{U}\nvDash_\sigma\forall x\psi$，即存在$a\in A$，使$\mathscr{U}\nvDash_{\sigma(x|a)}\psi$，而由于$x$不在$\varphi$中自由出现，由命题3.1.1有$\mathscr{U}\models_{\sigma(x|a)}\varphi$，于是由基本语义定义（4）有$\mathscr{U}\nvDash_{\sigma(x|a)}\varphi\rightarrow\psi$，再由基本语义定义(5)又有$\mathscr{U}\nvDash_\sigma\forall x(\varphi\rightarrow\psi)$．于是最后我们有$\mathscr{U}\models_\sigma\forall x(\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow(\varphi\rightarrow\forall x\psi)$．

合（1），（2）知对任意$\mathscr{U}$，任意指派σ有$\mathscr{U}\models_\sigma\forall x(\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow(\varphi\rightarrow\forall x\psi)$，即$Ax4$的任一条公理都是恒真式。

设φ是$\mathscr{L}$的任一公式，t是$\mathscr{L}$的一个项，t相对于x在φ中自由，则$\forall x\varphi\rightarrow\varphi(x/t)$是$Ax5$的一条公理。设$\mathscr{U}$是$\mathscr{L}$的一个模型，$\sigma$是$\mathscr{U}$的一个指派，设$t^\sigma=a\in A$.

如果$\mathscr{U}\models_\sigma\varphi(x/t)$，由基本语义定义（4）有
$\mathscr{U}\models_\sigma\forall x\varphi\rightarrow\varphi(x/t)$；

如果$\mathscr{U}\nvDash_\sigma\varphi(x/t)$，类似于命题3.1.1，不难证明$\mathscr{U}\models_\sigma\varphi(x/t)$当且仅当$\mathscr{U}\models_{\sigma(x|a)}\varphi$，这样我们有$\mathscr{U}\nvDash_{\sigma(x|a)}\varphi$。由基本语义定义$\mathscr{U}\nvDash_\sigma\forall x\varphi$，因此又有$\mathscr{U}\models_\sigma\forall x\varphi\rightarrow\varphi\ (x/t)$.

由φ的任意性，$\mathscr{U}$和σ的任意性知$Ax5$的任意一条公理都是恒真式

(iii) 最后我们来看等词公理。

对于$\mathscr{L}$的任意一个项t，由基本语义定义（1）易见$\mathscr{U}\models_\sigma t\equiv t$对任意$\mathscr{U}$，$\sigma$都成立。因此$t\equiv t$是恒真式。

设t_1，…，t_n，t_{n+1}，…，t_{2n}是$\mathscr{L}$的项，R是$\mathscr{L}$的任意一个n元关系符号。设$\mathscr{U}$是$\mathscr{L}$的任一模型，σ是$\mathscr{U}$的任一指派。如果$\mathscr{U}\models_\sigma t_1\equiv t_{n+1}$，…，$\mathscr{U}\models_\sigma t_n\equiv t_{2n}$，则$t_1^\sigma=t_{n+1}^\sigma$，…，$t_n^\sigma=t_{2n}^\sigma$. 如果还有$\mathscr{U}\models_\sigma R(t_1\cdots t_n)$，即$R^{\mathscr{U}}(t_1^\sigma\cdots t_n^\sigma)$成立，这样自然有$R^{\mathscr{U}}(t_{n+1}^\sigma,\cdots,t_{2n}^\sigma)$成立。因此有$\mathscr{U}\models_\sigma R(t_{n+1}\cdots t_{2n})$. 这样由基本语义定义（4）就有$\mathscr{U}\models_\sigma t_1\equiv t_{n+1}\rightarrow\cdots t_n\equiv t_{2n}\rightarrow R(t_1\cdots t_n)\rightarrow R(t_{n+1}\cdots t_{2n})$. 如果有$\mathscr{U}\nvDash_\sigma t_i\equiv t_{n+i}$，或$\mathscr{U}\nvDash_\sigma R(t_1\cdots t_n)$，则由基本语义定义（4）也有上述结论成立，这样$Ax7$也是恒真式。

$Ax8$的证明与$Ax7$类似。 ▌

命题逻辑中我们已经看到分离法则 MP 保持可满足性。一阶逻辑中也是一样有对任意 $\mathscr{U}$，任意 σ，任意公式 φ,ψ，如果 $\mathscr{U}\models_\sigma\varphi$，$\mathscr{U}\models_\sigma\varphi\to\psi$，就有 $\mathscr{U}\models_\sigma\psi$。

不幸的是对于公式 φ，概括法则不保持可满足性，即如果对某个模型 $\mathscr{U}$，$\mathscr{U}$ 的某个指派 σ，$\mathscr{U}\models_\sigma\varphi$，不一定有 $\mathscr{U}\models_\sigma\forall x\varphi$.

例如在一阶语言 $\mathscr{L}=\{P\}$中，P 是一元关系. 令$\mathscr{U}=\langle A,U\rangle$，$A=\{a,b\}$，$U=\{a\}\subset A$，$\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{L}$ 的一个模型。令$\varphi(v_1)=P(v_1)$，$\sigma=\langle a,b,\cdots\rangle$，则 $\mathscr{U}\models_\sigma P(v_1)$，但却有$\mathscr{U}\not\models_{\sigma(v_1|b)}P(v_1)$. 这样 $\mathscr{U}\not\models_\sigma\forall v_1\varphi(v_1)$.

虽然概括法则不保持一个指派 σ 下的可满足性，我们还是有下面的可靠性定理。

定理 3.1.3 **（可靠性定理）** 设 Γ 是 $\mathscr{L}$ 的一个公式集，φ 是 $\mathscr{L}$ 的一个公式，如果 $\Gamma\vdash\varphi$，则 $\Gamma\models\varphi$。

证明 设 $\Gamma\vdash\varphi$，模型 $\mathscr{U}\models\Gamma$。我们证明 $\mathscr{U}\models\varphi$。取从 Γ 出发到 φ 的一个证明 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n=\varphi$，对 $k\leqslant n$ 归纳证明有 $\mathscr{U}\models\varphi_k$。设 φ_1 是 $\mathscr{L}$ 的一条公理，由命题 3.1.1，有 $\mathscr{U}\models\varphi_1$，设 $\varphi_1\in\Gamma$，由题设有 $\mathscr{U}\models\varphi_1$。归纳假设对任意 φ_i，$i\leqslant k-1$ 有 $\mathscr{U}\models\varphi_i$，如果 φ_k 是公理，$\varphi_k\in\Gamma$，仿 φ_1 有 $\mathscr{U}\models\varphi_k$。设 φ_k 是由 φ_i，φ_j，i、$j\leqslant k-1$，经分离法则 MP 得到，不妨设 $\varphi_j=\varphi_i\to\varphi_k$。由 $\mathscr{U}\models\varphi_i$ 及 $\mathscr{U}\models\varphi_j$，即 $\mathscr{U}\models\varphi_i\to\varphi_k$及基本语义定义（4），有 $\mathscr{U}\models\varphi_k$。如果 φ_k 是由 φ_i，$i\leqslant k-1$，经推广法则 G 得到，即$\varphi_k=\forall x\varphi_i$由$\mathscr{U}\models\varphi_i$即对任意指派 σ，$\mathscr{U}\models_\sigma\varphi_i$，再由基本语义定义（5），$\mathscr{U}\models_\sigma\forall x\varphi_i$，故 $\mathscr{U}\models\forall x\varphi_i$，这就是 $\mathscr{U}\models\varphi_k$。

这样归纳证明完成。因此有 $\mathscr{U}\models\varphi_n$ 即 $\mathscr{U}\models\varphi$. 由 $\mathscr{U}$ 的任意性知 $\Gamma\models\varphi$. ▌

在可靠性定理中取 $\Gamma=\varnothing$，即得：

推论 3.1.4 设 φ 是 $\mathscr{L}$ 的一个公式，如果 $\vdash\varphi$，则 $\models\varphi$.

这个推论说明一阶逻辑的定理都是恒真式。设 T 是 $\mathscr{L}$ 的一

个句子集，如果 T 有模型 $\mathscr{U}$，则对任何恒假式 $\varphi\wedge\neg\varphi$，$T\nvdash\varphi\wedge\neg\varphi$. 否则，如果 $T\vdash\varphi\wedge\neg\varphi$，由可靠性定理有 $\mathscr{U}\models\varphi\wedge\neg\varphi$，而这是不可能的，这样我们有：

定理 3.1.5 设句子集 T 有模型，则 T 和谐。

一阶形式系统的公理都是恒真式，因此全体公理在任一模型中成立。而恒假式不能是 $\mathscr{L}$ 的定理，这样，一阶形式系统的公理集是和谐的，这就是：

定理 3.1.6 一阶逻辑形式系统 $\mathscr{L}$ 和谐。

练习

3.1.1 (1) 设 $\mathscr{L}=\{F, P\}$，其中 F 是一元函数符号，P 是一元关系符号，令 $A=\{a, b, c, d\}$，试定义 A 上的一个一元函数 F，A 上一元关系 U，使 $\mathscr{U}=\langle A, F, U\rangle$ 成为 $\mathscr{L}$ 的一个模型；

(2) 令 $\varphi(v_1)=P(v_1)\rightarrow P(F(v_1))$，则 $\varphi(v_1)$ 是练习 3.1.1 中语言 $\mathscr{L}$ 的一个公式，如果 $\mathscr{U}$ 是你定义的那个模型，令 v_1 的解释 $v_1^{\mathscr{U}}$ 分别是 a，b，c 或 d 时，计算 $\varphi(v_1)$ 分别取什么真假值，再确定 $\mathscr{L}$ 的句子 $\forall v_1\varphi(v_1)$，$\exists v_1\varphi(v_1)$ 在 $\mathscr{U}$ 中的取值；

(3) 你能不能构造 $\mathscr{L}$ 的一个模型，使 $\exists v_1\varphi(v_1)$ 在其中取值为真，而 $\forall v_1\varphi(v_1)$ 取值为假？能不能构造一个模型使上述两个句子取值都真？如能，请构造出来，如不能请说明理由。

3.1.2 令 $\mathscr{L}=\{+, 0\}$，试构造 $\mathscr{L}$ 的二个模型，使下列两个句子在一个模型中都真，在另一个模型中一真一假。

$\varphi_1=\forall v_1\exists v_2(v_1+v_2\equiv 0)$,

$\varphi_2=\forall v_1 v_2(v_1+v_2\equiv v_2+v_1)$。

3.1.3 试给出一个公式 $\varphi(x)$，使 $\varphi(x)\rightarrow\forall x\varphi(x)$ 不是 $\mathscr{L}$ 的一个定理，请证明你的结论。

3.1.4 设 φ, ψ 逻辑等价，证明对任何模型的任何指派，φ, ψ 的取值都相同。因此一个公式的前束标准形与原公式有相同的取

值。

3.1.5 证明下列公式都不是定理：

$\forall x\exists yR(x,y)\to\exists y\forall xR(x,y)$

$\forall x\forall y(R(x,y)\to R(y,x))$

$\forall x(\neg P(x)\to\neg P(y))$

3.1.6 设 $\varphi(x)$ 是 $\mathscr{L}$ 的一个公式，t 是 $\mathscr{L}$ 的一个项，t 相对于 x 在 φ 中自由，证明对 $\mathscr{L}$ 的任何模型 $\mathscr{U}$，对任何指派 σ，只要 $x^\sigma=t^\sigma$，即 x 与 t 有相同的解释，则 $\varphi(x)$ 与 $\varphi(x/t)$ 在 σ 下取相同的值。

3.1.7 设 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{L}$ 的模型，$\mathrm{Th}\mathscr{U}=\{\varphi: \mathscr{U}\models\varphi, \varphi$ 是 $\mathscr{L}$ 的句子$\}$. $\mathrm{Th}\mathscr{U}$ 是在 $\mathscr{U}$ 中真的所有的句子组成的句子集，证明 $\mathrm{Th}\mathscr{U}$ 是极大和谐句子集。

§3.2 模型的相互关系

设一阶语言 $\mathscr{L}=\{\{R_i\}_{i\in I};\{F_j\}_{j\in J},\{c_k\}_{k\in K}\}$. 本节介绍 $\mathscr{L}$ 的模型之间的相互关系。

1. 模型的同态和同构

设 $\mathscr{U}$，$\mathscr{U}'$ 是 $\mathscr{L}$ 的两个模型：

$\mathscr{U}=\langle A,\{R_i\}_{i\in I};\{F_j\}_{j\in J},\{c_k\}_{k\in k}\rangle$

$\mathscr{U}'=\langle A',\{R_i'\}_{i\in I};\{F_j'\}_{j\in J},\{c_k'\}_{k\in k}\rangle$

如果存在映射 f：$A\to A'$，使

（1）对任意 $i\in I$，若 R_i 是 $\mathscr{L}$ 的 n 元关系符号，对任意 $a_1,\cdots,a_n\in A$，如果 $R_i(a_1,\cdots,a_n)$ 成立，则 $R_i'(f(a_1)\cdots f(a_n))$ 成立；

（2）对任意 $j\in J$，若 F_j 是 $\mathscr{L}$ 的 m 元函数符号，对任意 $a_1,\cdots,a_m\in A$，

$f(F_j(a_1,\cdots,a_m))=F'_j(f(a_1)\cdots f(a_m))$

(3) 对任意 $k\in k$，$f(c_k)=c'_k$，
就称模型 $\mathscr{U}$ 与 $\mathscr{U}'$ 同态，或 $\mathscr{U}'$ 是 $\mathscr{U}$ 的**同态模型**，称映射 f 是 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{U}'$ 的**同态映射**，记作 f：$\mathscr{U}\sim\mathscr{U}'$.

如果 f 是模型 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{U}'$ 的同态映射，而且 f 还是 A 到 A' 的一一映射，条件（1）加强为

$R_i(a_1\cdots a_n)$ 成立当且仅当 $R'_i(f(a_1)\cdots f(a_n))$ 成立，则称模型 $\mathscr{U}$ 与 $\mathscr{U}'$ **同构**，或称 $\mathscr{U}'$ 是 $\mathscr{U}$ 的**同构模型**，f 称为 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{U}'$ 的**同构映射**，记作 f：$\mathscr{U}\cong\mathscr{U}'$.

同构是模型间的等价关系，即有自反性：任何模型 $\mathscr{U}$，$\mathscr{U}\cong\mathscr{U}$；对称性：若 $\mathscr{U}\cong\mathscr{B}$，则有 $\mathscr{B}\cong\mathscr{U}$；传递性：若 $\mathscr{U}\cong\mathscr{B}$，$\mathscr{B}\cong\mathscr{C}$，则 $\mathscr{U}\cong\mathscr{C}$. 同构的模型必有相同的势，即若 $\mathscr{U}\cong\mathscr{U}'$，则 $|A|=|A'|$.

例 1 令 $\mathscr{L}=\{+,0\}$，$\mathscr{U}_1=\langle N,+,0\rangle$，$\mathscr{U}_2=\langle A,+',0'\rangle$. 其中 N 是含 0 的自然数集，$A=\{0,1\}$，$\mathscr{U}_1$ 中“+”是自然数加法，0 是 N 中的 0，$\mathscr{U}_2$ 中“+”定义为 $0+'0=1+'1=0$，$0+'1=1+'0=1$，$0'$ 定义为 A 中的 0. 这样 $\mathscr{U}_1$，$\mathscr{U}_2$ 是 $\mathscr{L}$ 的模型。令 $f:N\to A$，对任意 n，$n=2k$ 时，$f(n)=0$，$n=2k+1$ 时，$f(n)=1$，则 f 是一个映射，而且是 $\mathscr{U}_1$ 到 $\mathscr{U}_2$ 的同态映射，因此 $\mathscr{U}_2$ 是 $\mathscr{U}_1$ 的同态模型。

令 $\mathscr{U}_3=(B,+,0)$，$B=\{2^n: n\in N\}$，而“+”定义为 B 中通常的乘法，0 定义为 B 中元素 2^0. 令 f：$N\to B$，对任意 $n\in N$，$f(n)=2^n$，则 f 是 N 到 B 的一一对应，而且是 $\mathscr{U}_1$ 到 $\mathscr{U}_3$ 的同构映射，f：$\mathscr{U}_1\cong\mathscr{U}_3$.

命题 3.2.1 设 $\mathscr{U}$、$\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{L}$ 的两个模型，f：$\mathscr{U}\cong\mathscr{B}$，则对 $\mathscr{L}$ 的任何公式 $\varphi(x_1\cdots x_n)$，任意 a_1，…，$a_n\in A$ 有
$\mathscr{U}\models\varphi[a_1\cdots a_n]$ 当且仅当 $\mathscr{B}\models\varphi[f(a_1)\cdots f(a_n)]$

证明 先对项 $t(x_1\cdots x_n)$ 的复杂性归纳证明

(1) $f(t^{\mathscr{U}}(a_1\cdots a_n))=t^{\mathscr{B}}(f(a_1)\cdots f(a_n))$

(1.1) 设 $t(x_1\cdots x_n)=x_i$ 是单个命题变元，则 $\mathscr{U}$ 中 $t^{\mathscr{U}}(a_1\cdots a_n)=a_i$，$\mathscr{B}$ 中 $t^{\mathscr{B}}(f(a_1)\cdots f(a_n))=f(a_i)$，因此有 (1) 成立.

(1.2) 设 $t(x_1\cdots x_n)=c_k$ 是某个常量符号，则 $f(t^{\mathscr{U}}(a_1\cdots a_n))=f(c_k^{\mathscr{U}})=c_k^{\mathscr{B}}=t^{\mathscr{B}}(f(a_1),\cdots,f(a_n))$.

(1.3) 设 $t(x_1\cdots x_n)=F_j(t_1(x_1\cdots x_n),\cdots,t_m(x_1\cdots x_n))$，

其中 $j\in J$，F_j 是 $\mathscr{L}$ 的 m 元函数符号，t_1，…，t_m 都是 $\mathscr{L}$ 的项，并归纳假设，对 $i=1$，…，m，
$f(t_i^{\mathscr{U}}(a_1\cdots a_n))=t_i^{\mathscr{B}}(f(a_1)\cdots f(a_n))$. 设

$t_i^{\mathscr{U}}(a_1\cdots a_n)=c_i\in A$，$t_i^{\mathscr{B}}(f(a_1)\cdots f(a_n))=d_i\in B$. 则归纳假设是 $f(c_i)=d_i$.

现在 $t^{\mathscr{U}}(a_1\cdots a_n)=F_j^{\mathscr{U}}(c_1\cdots c_n)$. 由 f：$\mathscr{U}\cong\mathscr{B}$ 是同构对应，$f(t^{\mathscr{U}}(a_1\cdots a_n)) = f(F_j^{\mathscr{U}}(c_1\cdots c_n)) \overset{(*)}{=} F_j^{\mathscr{B}}(f(c_1)\cdots f(c_n)) = F_j^{\mathscr{B}}(d_1\cdots d_n) = F_j^{\mathscr{B}}(t_1^{\mathscr{B}}(f(a_1)\cdots f(a_n))\cdots t_m^{\mathscr{B}}(f(a_1)\cdots f(a_n)) = t^{\mathscr{B}}(f(a_1)\cdots f(a_n))$. 因此 (1) 成立。(*) 所代表的等号成立是由于有同构对应的条件 (2).

再对公式 $\varphi(x_1\cdots x_n)$ 的复杂性归纳证明

(2) $\mathscr{U}\models\varphi\,[a_1\cdots a_n]$ 当且仅当 $\mathscr{B}\models\varphi[f(a_1)\cdots f(a_n)]$

(2.1) φ 是 $t_1(x_1\cdots x_n)\equiv t_2(x_1\cdots x_n)$，其中 t_1，t_2 是项，则 $\mathscr{U}\models\varphi\,[a_1\cdots a_n]$ 当且仅当 $t_1^{\mathscr{U}}(a_1\cdots a_n)=t_2^{\mathscr{U}}(a_1\cdots a_n)$，由于 f 是同构对应，当且仅当 $f(t_1^{\mathscr{U}}(a_1\cdots a_n))=f(t_2^{\mathscr{U}}(a_1\cdots a_n)$，由 (1) 又有，当且仅当 $t_1^{\mathscr{B}}(f(a_1)\cdots f(a_n))=t_2^{\mathscr{B}}(f(a_1)\cdots f(a_n))$，当且仅当 $\mathscr{B}\models\varphi\,[f\ (a_1)\ \cdots f\ (a_n)]$. 因此 (2) 成立。

(2.2) φ 是 $R_i(t_1(x_1\cdots x_n)\cdots t_m(x_1\cdots x_n))$，其中 R_i 是某个 m 元关系符号，t_1，…，t_m 是项。

设 $t_1^{\mathscr{U}}(a_1\cdots a_n)=c_1,\cdots,t_m^{\mathscr{U}}(a_1\cdots a_n)=c_m,t_1^{\mathscr{B}}(f(a_1)\cdots f(a_n))=d_1,\cdots,t_m^{\mathscr{B}}(f(a_1)\cdots f(a_n))=d_m$，由 (1) $f(c_1)=d_1,\cdots,f(c_m)=d_m$. $\mathscr{U}\models\varphi(a_1\cdots a_n)$ 当且仅当 $R_i^{\mathscr{U}}(t_1^{\mathscr{U}}(a_1\cdots a_n)\cdots t_m^{\mathscr{U}}(a_1\cdots a_n))$ 成立，当且

仅当 $R_i^{\mathscr{U}}(c_1\cdots c_m)$ 成立，当且仅当 $R_i^{\mathscr{B}}(f(c_1)\cdots f(c_m))$ 成立，当且仅当 $R_i^{\mathscr{B}}(d_1\cdots d_m)$ 成立，当且仅当 $R_i^{\mathscr{B}}(t_1^{\mathscr{B}}(f(a_1)\cdots f(a_n))\cdots t_m^{\mathscr{B}}(f(a_1)\cdots f(a_n))$成立，当且仅当 $\mathscr{B}\models\varphi[f(a_1)\cdots f(a_n)]$ 成立，因此（2）成立。读者可自行给出每个当且仅当的理由。

（2.3）设 φ 是$\neg\psi(x_1\cdots x_n)$，$\psi_1(x_1\cdots x_n)\to\psi_2(x_1\cdots x_n)$，由归纳假设容易证明（2）成立。

（2.4）设 φ 是$\forall x\psi(xx_1\cdots x_n)$.

$\mathscr{U}\models\varphi[a_1\cdots a_n]$ 当且仅当 $\mathscr{U}\models\forall x\psi[a_1\cdots a_n]$，当且仅当

对任意 $a\in A$，$\mathscr{U}\models\psi[aa_1\cdots a_n]$. 由归纳假设 $\mathscr{B}\models\psi[f(a)f(a_1)\cdots f(a_n)]$. 由于 f 是 $A\to B$ 的一一对应，因此 f 是满射，即当 a 取遍 A 中所有元素时，$f(a)$ 取遍 B 中所有元素，这样上式当且仅当 $\mathscr{B}\models\forall x\psi[f(a_1)\cdots f(a_n)]$，即 $\mathscr{B}\models\varphi[f(a_1)\cdots f(a_n)]$，因此（2）成立。

合（2.1）—（2.4）知，对任意公式 $\varphi(x_1\cdots x_n)$，（2）成立，完成归纳。 ▍

由命题 3.2.1，两个模型同构可以看成两个模型除了论域中元素名称不同或记号不同之外，其意义完全一致。因此我们常把同构模型看成是完全相同的模型。

推论 3.2.2 设 $\mathscr{U}\cong\mathscr{B}$，则对 $\mathscr{L}$ 中任何句子 φ，$\mathscr{U}\models\varphi$，当且仅当 $\mathscr{B}\models\varphi$.

2. 模型的膨胀和归约

设 $\mathscr{L}=\{\{R_i\}_{i\in I},\{F_j\}_{j\in J},\{c_k\}_{k\in K}\}$，

$\mathscr{L}'=\{\{R_i\}_{i\in I'},\{F_j\}_{j\in J'},\{c_k\}_{k\in K'}\}$，其中 $I\subseteq I'$，$J\subseteq J'$，$K\subseteq K'$，即 $\mathscr{L}'$ 是 $\mathscr{L}$ 的膨胀，或 $\mathscr{L}$ 是 $\mathscr{L}'$ 的归约。设 $\mathscr{U}$，$\mathscr{U}'$ 分别是 $\mathscr{L}$ 与 $\mathscr{L}'$ 的模型，$\mathscr{U}$，$\mathscr{U}'$ 有相同的论域 A，而且对 $\mathscr{L}$ 的关系，函数和常量符号，$\mathscr{U}$，$\mathscr{U}'$ 中的解释全都相同，就称 $\mathscr{U}'$ 是 $\mathscr{U}$ 的**膨胀模型**，或称 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{U}'$ 的**归约模型**。膨胀模型 $\mathscr{U}'$ 只比模型 $\mathscr{U}$ 增加了 $\mathscr{L}'$ 中新的符号的解释，而保持原有符号的解释不变，因此，设 φ 是 $\mathscr{L}$

的一个句子，$\mathscr{U}'$是 $\mathscr{U}$ 的膨胀模型，如果 $\mathscr{U}\models\varphi$ 则仍有 $\mathscr{U}'\models\varphi$，反之亦真，即 $\mathscr{U}\models\varphi$ 当且仅当 $\mathscr{U}'\models\varphi$. 设 Σ 是 $\mathscr{L}$ 的句子集，$\mathscr{U}'$是 $\mathscr{U}$ 的膨胀模型，则 $\mathscr{U}\models\Sigma$ 当且仅当 $\mathscr{U}'\models\Sigma$. 如果 $\mathscr{L}'$的句子集 $\Sigma'\supset\Sigma$，$\mathscr{U}'\models\Sigma'$，则也有 $\mathscr{U}\models\Sigma$. 要注意对膨胀语言 $\mathscr{L}'$ 中的句子 φ，即便有 $\mathscr{U}'\models\varphi$，由于 φ 中可能有新的符号，φ 在归约模型 $\mathscr{U}$ 中可能没有解释。

如果 X 是一集**新常量**，即 X 是由不在 $\mathscr{L}$ 中出现的常量符号组成的集合。记 $\mathscr{L}_X=\mathscr{L}\cup X$ 称为 $\mathscr{L}$ 的**简单膨胀**。$\mathscr{L}$ 的模型 $\mathscr{U}$ 的 $\mathscr{L}_X$ 膨胀模型记作 $\mathscr{U}_X$，$\mathscr{U}_X=(\mathscr{U},\ c^{\mathscr{U}})_{c\in X}$，这里 $c^{\mathscr{U}}$ 是新常量 c 在 $\mathscr{U}_X$ 中的解释，$c^{\mathscr{U}}\in A$，不引起歧义时也记 $\mathscr{U}_X=(\mathscr{U},\ c)_{c\in X}$.

设 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{L}$ 的模型，我们常把论域 A 的一个子集 $X\subset A$ 作为新常量符号集加添到语言 $\mathscr{L}$ 中得到膨胀语言 $\mathscr{L}_X$，这时我们用 $a\in X\subset A$ 作为新常量符号 a 自己的解释，模型 $\mathscr{U}$ 就膨胀为

$\mathscr{U}_X=(\mathscr{U},\ a)_{a\in X}$. 如果 $X=A$，则 $\mathscr{U}_A=(\mathscr{U},\ a)_{a\in A}$。

例 2 例 1 中 $\mathscr{L}=\{+,\ 0\}$，$\mathscr{U}_1=\langle N,\ +,\ 0\rangle$ 是 $\mathscr{L}$ 的模型。设 $\mathscr{L}_1=\{+,\ \cdot,\ 0,\ 1\}$ 则 $\mathscr{L}_1$ 是 $\mathscr{L}$ 的膨胀，$\mathscr{U}_2=\langle N,\ +,\ \cdot,\ 0,\ 1\rangle$，其中$+$，$\cdot$，0，1 都是 N 中普通加法、乘法和 0、1，这样 $\mathscr{U}_2$ 就是 $\mathscr{U}_1$ 的膨胀模型。

取 $X=\{1,\ \cdots,\ n\}\subset N$，$X$ 是 N 的子集，令 $\mathscr{L}_X=\mathscr{L}\cup X=\{+,\ 0,\ 1,\ \cdots,\ n\}$，则 $\mathscr{L}_1$ 是 $\mathscr{L}$ 的膨胀语言，其中 1，…，n 都是新常量符号。令 $\mathscr{U}_{1X}=\langle N,\ +,\ 0,\ 1,\ \cdots,\ n\rangle$，则 $\mathscr{U}_{1X}$是 $\mathscr{U}_1$ 的膨胀模型，其中 1，…，n 分别解释新常量符号 1，…，n.

语言 $\mathscr{L}$ 中添加新常量是模型论惯用的方法，它可以使我们能用新常量来构造新的句子。如果 $\mathscr{L}$ 中添加模型论域中的元素作为新常量，则可以对模型中的元素来构造新的句子。例如 $\mathscr{L}=\{+,\ 0\}$ 中，我们没有句子 $1+1=2$，因为 1，2 都不是 $\mathscr{L}$ 的符号，但例 2 的 $\mathscr{L}_X$ 中我们可以有句子 $1+1\equiv2$，$1+2\equiv3$ 等等，而这些句子的意义与模型中语义解释是完全一致的，这是因为对新常量 1，

…，n 我们的解释是模型中这些元素本身。

3. 子模型和扩充模型

设 $\mathscr{L}=\{\{R_i\}_{i\in I},\{F_j\}_{j\in J},\{c_k\}_{k\in K}\}$；

$\mathscr{U}=\langle A,\{R_i^{\mathscr{U}}\}_{i\in I},\{F_j^{\mathscr{U}}\}_{j\in J},\{c_k^{\mathscr{U}}\}_{k\in K}\rangle$；

$\mathscr{U}'=\langle A',\{R_i^{\mathscr{U}'}\}_{i\in I},\{F_j^{\mathscr{U}'}\}_{j\in J},\{c_k^{\mathscr{U}'}\}_{k\in K}\rangle$.

如果 $A'\subseteq A$，$R_i^{\mathscr{U}'}=R_i^{\mathscr{U}}\cap A^{\mathscr{U}}$，$F_j^{\mathscr{U}'}=F_j^{\mathscr{U}}\mid A'$，$c_k^{\mathscr{U}'}=c_k^{\mathscr{U}}$ 就称 $\mathscr{U}'$ 是 $\mathscr{U}$ 的**子模型**，记作 $\mathscr{U}'\subseteq\mathscr{U}$，也称 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{U}'$ 的**扩充模型**。设 $\mathscr{U}'\subseteq\mathscr{U}$，则对任意 $i\in I$，若 R_i 是 n 元关系符号，对任意 a_1，…，$a_n\in A'$

$R_i^{\mathscr{U}'}(a_1\cdots a_n)$ 成立当且仅当 $R_i^{\mathscr{U}}(a_1\cdots a_n)$ 成立。对任意 $j\in J$，若 F_j 是 m 元函数符号，对任意 a_1，…，$a_m\in A'$，

$F_j^{\mathscr{U}'}(a_1\cdots a_m)=F_j^{\mathscr{U}}(a_1\cdots a_m)\in A'$.

对任意 $k\in K$，常量 c_k 的解释相同，即 $c_k^{\mathscr{U}'}=c_k^{\mathscr{U}}\in A'$.

设 $\mathscr{L}$ 中没有函数和常量符号，则 $\mathscr{L}$ 的模型 $\mathscr{U}$ 的论域 A 的任意子集都可以构成 $\mathscr{U}$ 的子模型。一般地，如果 $\mathscr{L}$ 中有函数和常量符号，子集 $X\subseteq A$ 不一定对函数封闭，即如果元素 a_1，…，$a_n\in X$，F_j 是 $\mathscr{L}$ 的函数符号，$F_j^{\mathscr{U}}(a_1\cdots a_n)$ 不一定还是 X 中元素。这样 X 就不一定能构成 $\mathscr{U}$ 的子模型了。

令 $X\subseteq A$ 是一个子集，我们知道必有一个子集 B，使 $X\subset B\subset A$，B 可以构成 $\mathscr{U}$ 的子模型。例如取 $B=A$，$\mathscr{U}$ 当然是 $\mathscr{U}$ 自己的子模型。如果 B 是最小的子集，使 $X\subseteq B\subseteq A$，$\mathscr{B}$ 以 B 为论域 $\mathscr{B}\subseteq\mathscr{U}$，就称 $\mathscr{B}$ 是由 **X 生成的** $\mathscr{U}$ 的**子模型**。

设 $\mathscr{U}_1\subseteq\mathscr{U}$，$\mathscr{U}_2\subseteq\mathscr{U}$，即 $\mathscr{U}_1$，$\mathscr{U}_2$ 都是 $\mathscr{U}$ 的子模型。$\mathscr{U}_1$ 的论域 $A_1\subseteq A$，$\mathscr{U}_2$ 的论域 $A_2\subseteq A$，则 $A_1\cap A_2\subseteq A$，由 A_1，A_2 对函数和常量封闭，可知 $A_1\cap A_2$ 也对函数和常量封闭。因此以 $A_1\cap A_2$ 为论域可以构造 $\mathscr{U}$ 的一个子模型，记作 $\mathscr{U}_1\cap\mathscr{U}_2$. 这样**子模型的交**还是子模型。设 $\mathscr{U}_i\subseteq\mathscr{U}$，$i\in I$，即 $\mathscr{U}_i$，$i\in I$，是 $\mathscr{U}$

的一族子模型。不难看出$\bigcap_{i\in I}\mathscr{U}_i$也是$\mathscr{U}$的子模型，其论域为$\bigcap_{i\in I}A_i$.

设$X\subseteq A$，如果$\mathscr{U}$的所有包含X的子模型的族是$\mathscr{U}_i$，$i\in I$，则$\bigcap_{i\in I}\mathscr{U}_i$就是$X$生成的子模型。

令$B=\{t^{\mathscr{U}}(a_1\cdots a_n)$：$t(x_1\cdots x_n)$是$\mathscr{L}$的项，$a_1$，…，$a_n\in X\}$，则$B\subseteq A$，直观地说$B$是由$X$中元素多次经函数复合运算得到的集合。由于常量是项，易见B对常量封闭，即$\mathscr{L}$中所有的常量的解释都是B的元素。又因为单个变元x_i是项，因此任意元素$a\in X$，可以作x_i的解释$x_i^{\mathscr{U}}$，于是有$a\in B$. 这样有$X\subseteq B$. 设b_1，…，$b_m\in B$，F_j是$\mathscr{L}$的m元函数符号，由于$b_i=t_i^{\mathscr{U}}(a_1\cdots a_n)$，$i=1$，…，$m$，$a_1$，…，$a_n\in X$，令$t(x_1\cdots x_n)=F_j(t_1(x_1\cdots x_n),\cdots,t_m(x_1\cdots x_n))$是$\mathscr{L}$的项，因此$F_j^{\mathscr{U}}(b_1\cdots b_m)=F_j^{\mathscr{U}}(t_1^{\mathscr{U}}(a_1\cdots a_n),\cdots,t_m^{\mathscr{U}}(a_1\cdots a_n))=t^{\mathscr{U}}(a_1\cdots a_n)\in B$. 因此$B$对函数也封闭，这样由$B$可以构成$\mathscr{U}$的子模型$\mathscr{B}\subseteq\mathscr{U}$。

不难看出对任意子模型$\mathscr{U}_i\subseteq\mathscr{U}$，$i\in I$，有$X\subset A_i$，必有$X\subseteq B\subseteq A_i\subseteq A$，因此$\mathscr{B}\subseteq\mathscr{U}_i\subseteq\mathscr{U}$. 这样有$\mathscr{B}\subseteq\bigcap_{i\in I}\mathscr{U}_i$，但由$X\subseteq B\subseteq A$知存在某个$i\in I$，使$\mathscr{U}_i=\mathscr{B}$，因此又有$\bigcap_{i\in I}\mathscr{U}_i\subseteq\mathscr{B}$. 于是$\mathscr{B}=\bigcap_{i\in I}\mathscr{U}_i$. 因此$\mathscr{B}$是$\mathscr{U}$的由$X$生成的子模型。

命题 3.2.3 设$\mathscr{U}\subseteq\mathscr{B}$，$\varphi(x_1\cdots x_n)$是$\mathscr{L}$的$\Sigma_1$公式，则对任意元素$a_1$，…，$a_n\in A$，如果$\mathscr{U}\models\varphi[a_1\cdots a_n]$，则$\mathscr{B}\models\varphi[a_1\cdots a_n]$.

证明 先对无量词公式$\psi(x_1\cdots x_k)$的复杂性归纳证明对任意a_1，…，$a_k\in A$，$\mathscr{U}\models\psi[a_1\cdots a_k]$当且仅当$\mathscr{B}\models\psi[a_1\cdots a_k]$.

(1) 设$t(x_1\cdots x_k)$是$\mathscr{L}$的项，证

$t^{\mathscr{B}}(a_1\cdots a_k)=t^{\mathscr{U}}(a_1\cdots a_k)\in A$

(1.1) 设$t(x_1\cdots x_k)=x_i$，则$t^{\mathscr{B}}(a_1\cdots a_k)=a_i=t^{\mathscr{U}}(a_1\cdots a_k)$.

(1.2) 设$t(x_1\cdots x_k)=F_j(t_1(x_1\cdots x_k),\cdots,t_m(x_1\cdots x_k))$.

归纳假设$t_i^{\mathscr{B}}(a_1\cdots a_k)=t_i^{\mathscr{U}}(a_1\cdots a_k)\in A$，则$t^{\mathscr{B}}(a_1\cdots a_k)=F_j^{\mathscr{B}}(t_1^{\mathscr{B}}(a_1\cdots a_k)\cdots t_m^{\mathscr{B}}(a_1\cdots a_k))=F_j^{\mathscr{B}}(t_1^{\mathscr{U}}(a_1\cdots a_k)\cdots t_m^{\mathscr{U}}(a_1\cdots a_k))=$

$F_j^{\mathscr{U}}(t_1^{\mathscr{U}}(a_1\cdots a_k)\cdots t_m^{\mathscr{U}}(a_1\cdots a_k))=t^{\mathscr{U}}(a_1\cdots a_k)\in A$.

(2) 设 $\psi(x_1\cdots x_k)=t_1(x_1\cdots x_k)\equiv t_2(x_1\cdots x_k)$.
若 $\mathscr{U}\models\psi\,[a_1\cdots a_k]$，则 $t_1^{\mathscr{U}}(a_1\cdots a_k)=t_2^{\mathscr{U}}(a_1\cdots a_k)$，由 (1) 有 $t_1^{\mathscr{B}}(a_1\cdots a_k)=t_2^{\mathscr{B}}(a_1\cdots a_k)$. 因此 $\mathscr{B}\models\varphi\,[a_1\cdots a_k]$，反之亦真。

(3) 设 $\psi(x_1\cdots x_k)=R_i(t_1(x_1\cdots x_k)\cdots t_m(x_1\cdots x_k))$.
若 $\mathscr{U}\models\psi[a_1\cdots a_k]$，即 $R_i^{\mathscr{U}}(t_1^{\mathscr{U}}(a_1\cdots a_k)\cdots t_m^{\mathscr{U}}(a_1\cdots a_k))$ 成立，由 (1) 及 $\mathscr{U}\subseteq\mathscr{B}$ 定义有 $R_i^{\mathscr{B}}(t_1^{\mathscr{B}}(a_1\cdots a_k)\cdots t_m^{\mathscr{B}}(a_1\cdots a_k))$ 成立，即 $\mathscr{B}\models\psi\,[a_1\cdots a_k]$，反之亦真。

(4) 设 $\psi(x_1\cdots x_k)=\neg\psi_1(x_1\cdots x_k)$，或 $\psi_1(x_1\cdots x_k)\rightarrow\psi_2(x_1\cdots x_k)$. 请读者自己补证。

设 $\varphi(x_1\cdots x_n)$ 是 $\mathscr{L}$ 的 Σ_1 公式，对 φ 中存在量词的个数归纳证明：对任意 $a_1,\cdots,a_n\in A$，如果 $\mathscr{U}\models\varphi[a_1\cdots a_n]$，则 $\mathscr{B}\models\varphi[a_1\cdots a_n]$.

(1) 设 $\varphi(x_1\cdots x_n)$ 无量词，由前段所证知结论成立。

(2) 设 $\varphi(x_1\cdots x_n)=\exists x\psi(xx_1\cdots x_n)$，如果 $\mathscr{U}\models\varphi[a_1\cdots a_n]$，则存在 $a\in A$，使 $\mathscr{U}\models\psi[aa_1\cdots a_n]$，由归纳假设有 $\mathscr{B}\models\psi[aa_1\cdots a_n]$. 因此有 $\mathscr{B}\models\exists x\psi[a_1\cdots a_n]$，即 $\mathscr{B}\models\varphi[a_1\cdots a_n]$.

这就完成了 Σ_1 公式 φ 的归纳，因此命题成立。 ▌

推论 3.2.4 设 $\mathscr{U}\subseteq\mathscr{B}$，$\varphi(x_1\cdots x_n)$ 是 $\mathscr{L}$ 的 Π_1 公式，则对任意元素 $a_1,\cdots,a_n\in A$，如果 $\mathscr{B}\models\varphi\,[a_1\cdots a_n]$，则 $\mathscr{U}\models\varphi\,[a_1\cdots a_n]$.

证明 令 $\psi=\neg\varphi$，则 $\psi(x_1\cdots x_n)$ 等价于一个 Σ_1 公式，由命题 3.2.3，$\mathscr{U}\models\psi[a_1\cdots a_n]$，就有 $\mathscr{B}\models\psi[a_1\cdots a_n]$. 这样设 $\mathscr{B}\models\varphi[a_1\cdots a_n]$，就有 $\mathscr{B}\not\models\psi[a_1\cdots a_n]$，因此 $\mathscr{U}\not\models\psi[a_1\cdots a_n]$，即有 $\mathscr{U}\models\varphi[a_1\cdots a_n]$. ▌

如果存在模型 $\mathscr{C}$，使 $\mathscr{U}\cong\mathscr{C}$，$\mathscr{C}\subseteq\mathscr{B}$，则称 $\mathscr{U}$ **同构嵌入** $\mathscr{B}$，记作 $\mathscr{U}\tilde{\subseteq}\mathscr{B}$. 如果映射 f: $\mathscr{U}\cong\mathscr{C}$，则记作 f: $\mathscr{U}\tilde{\subseteq}\mathscr{B}$，称 f 是 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{B}$ 的同构嵌入。

推论 3.2.5 设 $f:\mathscr{U}\stackrel{\sim}{\subset}\mathscr{B}$，$\varphi(x_1\cdots x_n)$ 是 Σ_1 公式，$a_1\cdots a_n\in A$，若 $\mathscr{U}\models\varphi[a_1\cdots a_n]$，则 $\mathscr{B}\models\varphi[f(a_1)\cdots f(a_n)]$. 设 φ 是 Π_1 公式，若 $\mathscr{B}\models\varphi[f(a_1)\cdots f(a_n)]$，则 $\mathscr{U}\models\varphi[a_1\cdots a_n]$. 此推论的证明留给读者作练习.

4. 初等等价模型

设 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 都是 $\mathscr{L}$ 的模型，如对 $\mathscr{L}$ 的任意句子 φ，$\mathscr{U}\models\varphi$ 当且仅当 $\mathscr{B}\models\varphi$，就称 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ **初等等价**，记作 $\mathscr{U}\equiv\mathscr{B}$.

由推论 3.2.2，如果 $\mathscr{U}\cong\mathscr{B}$，则 $\mathscr{U}\equiv\mathscr{B}$. 但反过来不一定成立，以后我们将看到反例。

$\mathscr{U}\equiv\mathscr{B}$ 意为 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 所满足的一阶语言 $\mathscr{L}$ 的句子集相同。初等等价是模型论特有的概念。

5. 初等子模型和初等扩充模型

设 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{L}$ 的两个模型，$\mathscr{U}\subseteq\mathscr{B}$，且对 $\mathscr{L}$ 中任意公式 $\varphi(x_1\cdots x_n)$，对任意 a_1，…，$a_n\in A$，

$$\mathscr{U}\models\varphi\ [a_1\cdots a_n]\ \text{当且仅当}\ \mathscr{B}\models\varphi\ [a_1\cdots a_n],$$

则称 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{B}$ 的**初等子模型**，也称 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{U}$ 的**初等扩充**. 记作 $\mathscr{U}\prec\mathscr{B}$.

如果 $\mathscr{U}\prec\mathscr{B}$，则必有 $\mathscr{U}\equiv\mathscr{B}$，但其逆不一定成立，设 $\mathscr{U}$、$\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{L}$ 的两个模型，如果存在模型 $\mathscr{C}$，使 $\mathscr{U}\cong\mathscr{C}$，$\mathscr{C}\prec\mathscr{B}$，则称 $\mathscr{U}$ **初等嵌入** $\mathscr{B}$，记作 $\mathscr{U}\precsim\mathscr{B}$. 称同构映射 f: $\mathscr{U}\cong\mathscr{C}$，为初等嵌入映射 f: $\mathscr{U}\precsim B$.

命题 3.2.6 设 $\mathscr{U}\subseteq\mathscr{B}$，令 $\mathscr{L}_A=\mathscr{L}\cup A$ 是膨胀语言，$\mathscr{U}_A=(\mathscr{U},a)_{a\in A}$，$\mathscr{B}_A=(\mathscr{B},a)_{a\in A}$ 分别是 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 到 $\mathscr{L}_A$ 的膨胀模型，新常量符号 $a\in A\subset B$，都用模型中的元素 a 自身作解释，如果 $\mathscr{U}_A\equiv\mathscr{B}_A$，则 $\mathscr{U}\prec\mathscr{B}$.

证明 设 φ $(x_1\cdots x_n)$ 是 $\mathscr{L}$ 中的任一公式，a_1，…，$a_n\in A$ 是 A 中任意 n 个元素，以 a_1，…，a_n 分别代换 φ 中自由出现的变元 x_1，…，x_n，得到 $\mathscr{L}_A$ 中的句子 φ $(a_1\cdots a_n)$. 不难看出

$\mathscr{U}\models\varphi[a_1\cdots a_n]$ 当且仅当 $\mathscr{U}_A\models\varphi(a_1\cdots a_n)$。同样也有 $\mathscr{B}\models\varphi[a_1\cdots a_n]$ 当且仅当 $\mathscr{B}_A\models\varphi(a_1\cdots a_n)$. 由 $\mathscr{U}_A\equiv\mathscr{B}_A$，又有 $\mathscr{U}_A\models\varphi(a_1\cdots a_n)$ 当且仅当 $\mathscr{B}_A\models\varphi(a_1\cdots a_n)$. 因此 $\mathscr{U}\models\varphi(a_1\cdots a_n)$ 当且仅当 $\mathscr{B}\models\varphi(a_1\cdots a_n)$，由定义有 $\mathscr{U}\prec\mathscr{B}$. ▎

A 是 $\mathscr{U}$ 的论域。设 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{L}$ 的两个模型。令 $\overline{\mathscr{L}}=\mathscr{L}\cup\{c_a: a\in A\}$，$\overline{\mathscr{L}}$ 是对每个元素 $a\in A$，添加新常量符号 c_a 得到的膨胀语言。设 $\mathscr{U}_A=(\mathscr{U}, c_a)_{a\in A}$ 是 $\mathscr{U}$ 的膨胀模型，对每个新常量 c_a、$\mathscr{U}_A$ 中用 a 作 c_a 的解释。$\mathscr{B}_A=(\mathscr{B}, c_a)_{a\in A}$ 是 $\mathscr{B}$ 的膨胀模型。对每个新常量 c_a，$\mathscr{B}_A$ 中用 $\mathscr{B}$ 的某个元素作其解释。

命题 3.2.7 设 $\mathscr{U}_A\equiv\mathscr{B}_A$，则 $\mathscr{U}\precsim\mathscr{B}$.

证明 先找一个映射 $f: A\to B$，对每个 $a\in A$，我们已有 $c_a\in\overline{\mathscr{L}}$，因此存在唯一的 $b\in B$，在 $\mathscr{B}_A$ 中以 b 作为 c_a 的解释。令 $f(a)=b$，则 f 是 A 到 B 内的一个映射。

(1) f 是 A 到 B 内的一个单射，即对任何两个元素 $a_1, a_2\in A$，如果 $a_1\neq a_2$，当且仅当 $f(a_1)\neq f(a_2)$.

由于 $a_1, a_2\in A$，因此有新常量 $c_{a_1}, c_{a_2}\in\overline{\mathscr{L}}$，$c_{a_1}, c_{a_2}$ 在 $\mathscr{U}_A$、$\mathscr{B}_A$ 中的解释分别是 a_1，a_2 和 $f(a_1)$，$f(a_2)$. 这样 $a_1\neq a_2$ 当且仅当 $\mathscr{U}_A\models\neg c_{a_1}\equiv c_{a_2}$. $f(a_1)\neq f(a_2)$ 当且仅当 $\mathscr{B}_A\models\neg c_{a_1}\equiv c_{a_2}$. 但由 $\mathscr{U}_A\equiv\mathscr{B}_A$ 有 $\mathscr{U}_A\models\neg c_{a_1}\equiv c_{a_2}$ 当且仅当 $\mathscr{B}_A\models\neg c_{a_1}\equiv c_{a_2}$ 因此有 $a_1\neq a_2$ 当且仅当 $f(a_1)\neq f(a_2)$.

(2) 令 $\{f(a): a\in A\}=A_1$，由 (1) $A_1\subset B$. $f: A\to A_1$ 是一一映射。我们断定由 A_1 可以作成 $\mathscr{B}$ 的子模型 $\mathscr{U}_1$.

(2.1) A_1 对 $\mathscr{L}$ 的函数和常量封闭。设 F_j 是 $\mathscr{L}$ 的 n 元函数符号，$b_1, \cdots, b_n\in A_1$，我们证明 $F_j^{\mathscr{B}}(b_1\cdots b_n)\in A_1$.

由 A_1 的定义知存在 $a_1,\cdots,a_n\in A$，使 $f(a_1)=b_1,\cdots,f(a_n)=b_n$. 由 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{L}$ 的模型，因此有 $a\in A$，使 $F_j^{\mathscr{U}}(a_1\cdots a_n)=a$，这样有 $c_{a_1}, \cdots, c_{a_n}, c_a\in\overline{\mathscr{L}}$. $\mathscr{U}_A\models F_j(c_{a_1}, \cdots, c_{a_n})\equiv c_a$. 由 $\mathscr{U}_A\equiv\mathscr{B}_A$，也

有 $\mathscr{B}_A \models F_j(c_{a_1}, \cdots, c_{a_n}) \equiv c_a$. 这样有$F_j^{\mathscr{B}}(b_1 \cdots b_n) = b$,$b$ 又是 c_a 在 $\mathscr{B}_A$ 中的解释，因此有 $b = f(a) \in A_1$ 即 $F_j^{\mathscr{B}}(b_1 \cdots b_n) \in A_1$.

对 $\mathscr{L}$ 的常量符号 c_k，设 c_k 在 $\mathscr{U}$ 中的解释是 a，则由 $a=a$ 知 $\mathscr{U}_A \models c_a \equiv c_k$，再由 $\mathscr{U}_A \equiv \mathscr{B}_A$ 有 $\mathscr{B}_A \models c_a \equiv c_k$ 即 c_k 与 c_a 在 $\mathscr{B}_A$ 中解释相同，而 c_a 在 $\mathscr{B}_A$ 中的解释是 $f(a)$. 由 $f(a) \in A_1$，c_k 在 A_1 中的解释也是 $f(a)$. 因此 A_1 对常量封闭.

(2.2) 由 (2.1) 知可以以 A_1 为论域构造子模型 $\mathscr{U}_{1A} \subseteq \mathscr{B}_A$. 我们断定有 f: $\mathscr{U}_A \cong \mathscr{U}_{1A}$.

由 (1) 已知 f 是 A 到 A_1 的一一对应。设 R_i 是 $\mathscr{L}$ 的 n 元关系符号，$a_1, \cdots, a_n \in A$，则 $c_{a_1}, \cdots, c_{a_n} \in \overline{\mathscr{L}}$. $\mathscr{U}$ 中$R_i^{\mathscr{U}}(a_1, \cdots a_n)$ 成立当且仅当 $\mathscr{U}_A \models R_i(c_{a_1} \cdots c_{a_n})$，当且仅当$\mathscr{B}_A \models R_i(c_{a_1} \cdots c_{a_n})$，当且仅当 $R_i^{\mathscr{B}}(f(a_1) \cdots f(a_n))$，由于 $\mathscr{U}_1 \subseteq \mathscr{B}$，又有 $R_i^{\mathscr{B}}(f(a_1) \cdots f(a_n))$当且仅当 $R_i^{\mathscr{U}_1}(f(a_1) \cdots f(a_n))$.

设 F_j 是 $\mathscr{L}$ 的 m 元函数符号,$a_1, \cdots, a_m \in A$. $\mathscr{U}$ 中必有$a \in A$，使 $F_j^{\mathscr{U}}(a_1 \cdots a_m) = a$. 由 (2.1) 有 $F_j^{\mathscr{B}}(f(a_1) \cdots f(a_m)) = f(a)$. 此即 $f(F_j^{\mathscr{U}}(a_1 \cdots a_m)) = F_j^{\mathscr{U}_1}(f(a_1) \cdots f(a_m))$.

对 $\mathscr{L}$ 的每个常量符号 c_k，由 (2.1) 已知若 c_k 在 $\mathscr{U}_A$ 中的解释为 a，则在 $\mathscr{U}_{1A}$中的解释为 $f(a)$.

由 (2.1)、(2.2) 知，$\mathscr{U}_A \cong \mathscr{U}_{1A}$. 这就得到$\mathscr{U}_A \mathrel{\widetilde{\subseteq}} \mathscr{B}_A$. 由 $\mathscr{U}_A \equiv \mathscr{B}_A$，类似于命题 3.2.6 有 $\mathscr{U} \mathrel{\widetilde{\prec}} \mathscr{B}$. ▌

命题 3.2.8 设 $\mathscr{U}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ 都是 $\mathscr{L}$ 的模型，则

(i) 如果 $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{B}$, $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{C}$，则 $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{C}$;

(ii) 如果 $\mathscr{U} \prec \mathscr{B}$, $\mathscr{B} \prec \mathscr{C}$，则 $\mathscr{U} \prec \mathscr{C}$;

(iii) 如果 $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{B}$, $\mathscr{U} \prec \mathscr{C}$, $\mathscr{B} \prec \mathscr{C}$，则 $\mathscr{U} \prec \mathscr{B}$.

把上述子模型和初等子模型改成同构嵌入和初等嵌入结论仍然成立。我们把证明当作练习，留给读者去做。

练习

3.2.1　设 $\mathscr{L}=\{\leqslant, F, c\}$，其中 F 是二元函数符号，c 是常量符号，设 $\mathscr{U}=\langle N, \leqslant, +, 0\rangle$，$\mathscr{B}=\langle N, \leqslant, \cdot, 1\rangle$，则 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 都是 $\mathscr{L}$ 的模型，证明 $\mathscr{U}\widetilde{\subset}\mathscr{B}$.

3.2.2　设 $\mathscr{U}\equiv\mathscr{B}$. 如果 $\mathscr{U}$ 中每个元素都是 $\mathscr{L}$ 的某常量符号的解释，则 $\mathscr{U}\prec\mathscr{B}$；如果 $\mathscr{B}$ 中每个元素也都是 $\mathscr{L}$ 的某常量符号的解释，则 $\mathscr{U}\cong\mathscr{B}$.

3.2.3　设 $\mathscr{L}\subseteq\mathscr{L}'$，$\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{L}'$ 的模型，以 $\mathscr{U}\equiv_{\mathscr{L}}\mathscr{B}$ 表示 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 的 $\mathscr{L}$ 归约模型初等等价，证明 $\mathscr{U}\equiv\mathscr{B}$ 当且仅当对任意有限语言 $\mathscr{L}\subseteq\mathscr{L}'$，$\mathscr{U}\equiv_{\mathscr{L}}\mathscr{B}$.

3.2.4　对任意 $\mathscr{L}$，$\mathscr{L}$ 中至多有 $2^{\|\mathscr{L}\|}$ 个互不初等等价的模型。

3.2.5　证明命题 3.2.8.

3.2.6　设 Σ 是极大和谐句子集，$\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 是 Σ 的两个模型，则 $\mathscr{U}\equiv\mathscr{B}$. 特别，如果 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{L}$ 的两个模型，$\mathscr{B}\models\mathrm{Th}\mathscr{U}$，则 $\mathscr{U}\equiv\mathscr{B}$.

§3.3　常见的语言和模型

例 1　$\mathscr{L}=\varnothing$，即 $\mathscr{L}$ 中没有非逻辑符号，则任何一个非空集合 A 可以构成 $\mathscr{L}$ 的一个模型 $\mathscr{U}=\langle A\rangle$.

令 δ_n，$0<n<\omega$ 是如下句子：

δ_1：$\exists v_0(v_0\equiv v_0)$，

δ_2：$\exists v_0v_1(v_0\not\equiv v_1)$，

δ_3：$\exists v_0v_1v_2(v_0\not\equiv v_1\wedge v_1\not\equiv v_2\wedge v_0\not\equiv v_2)$，

……

其中 $v_0\neq v_1$ 是 $\neg(v_0\equiv v_1)$ 的简写，$\exists v_0v_1\varphi$ 是 $\exists v_0\exists v_1\varphi$ 的简写等等。对任意 $n<\omega$，$\mathscr{U}\models\delta_n$ 当且仅当 A 中至少有 n 个不同的元素。令 $\Sigma=\{\delta_n: 0<n<\omega\}$，$\mathscr{U}\models\Sigma$ 当且仅当 A 中有无限多个元素。$\mathscr{L}$ 中任意两个同势的模型同构。

例 2 $\mathscr{L}=\{R\}$，R 是一元关系，设 A 是非空集合，$V\subseteq A$，则 $\mathscr{U}=\langle A, V\rangle$ 是 $\mathscr{L}$ 的模型，对任意元素 $a\in A$，$\mathscr{U}\models R[a]$ 当且仅当 $a\in V$，设 Σ 是 $\mathscr{L}$ 中下列句子组成的句子集：

$\exists v_0R(v_0)$；

$\exists v_0v_1(R(v_0)\wedge R(v_1)\wedge v_0\neq v_1)$；

$\exists v_0v_1v_2(R(v_0)\wedge R(v_1)\wedge R(v_2)\wedge v_0\neq v_1\wedge v_0\neq v_2\wedge v_1\neq v_2)$；

……

则 $\mathscr{U}\models\Sigma$ 当且仅当 V 无限。如果 Σ_1 是下列句子的集合：

$\exists v_0(\neg R(v_0))$；

$\exists v_0v_1(\neg R(v_0)\wedge\neg R(v_1)\wedge v_0\neq v_1)$；

$\exists v_0v_1v_2(\neg R(v_0)\wedge\neg R(v_1)\wedge\neg R(v_2)\wedge v_0\neq v_1\wedge v_0\neq v_2\wedge v_1\neq v_2)$；

……

则 $\mathscr{U}\models\Sigma_1$，当且仅当 $A\backslash V$ 无限。而 $\mathscr{U}\models\Sigma_1\cup\Sigma$ 当且仅当 V 和 $A\backslash V$ 都无限。

例 3 $\mathscr{L}=\{E\}$，E 是一个二元关系符号。以 $x\sim y$ 表示 $E(x, y)$，考虑下列句子：(本节以下句子中都省去最前面的一组全称量词)

(1) $x\sim x$，自反性；

(2) $x\sim y\to y\sim x$，对称性；

(3) $x\sim y\wedge y\sim z\to x\sim z$，传递性.

$\mathscr{L}$ 的模型 $\mathscr{U}=\langle A, E\rangle$，若满足句子 (1)，(2) 和 (3)，则称 E 是 A 的一个**等价关系**。对每个 $a\in A$，定义 $\hat{a}=\{b\in A: b\sim a\}$，称 $\hat{a}$ 为 a 的**等价类**。对任意 a，$b\in A$，$a\sim b$ 称 a，b 等价。则 $\hat{a}$ 是全

体与 a 等价的元素组成的集合。$\hat{a}$ 中任意两个元素都互相等价。对任意 $a, b\in A$，如果 $\hat{a}\cap\hat{b}\neq\varnothing$，即存在元素 $c\in A$，$c\in\hat{a}\cap\hat{b}$，则对任意元素 $d\in\hat{a}$ 有 $d\sim c$，因此 $d\in\hat{b}$，即 $\hat{a}\subseteq\hat{b}$，反之亦有 $\hat{b}\subseteq\hat{a}$，于是 $\hat{a}=\hat{b}$。这样 A 中元素被划分为互不相交的一些等价类，对任意 $a\in A$，a 都属于等价类 $\hat{a}$，因此 $A=\bigcup\{\hat{a}: a\in A\}$，对每个等价类可以任取一个元素作其代表元，例如 a 可以作为 $\hat{a}$ 的**代表元**，若 b 是 $\hat{a}$ 的代表元，则 $b\in\hat{a}$，因此 $b\sim a$.

等价关系是非常有用的代数概念，对任何一个集合 A，如果 A 可以划分为一些互不相交的子集的并，则可以在 A 上定义一个等价关系：任 $a, b\in A$，$a\sim b$ 当且仅当 a, b 同属一个子集。

例 4 $\mathscr{L}=\{\leqslant\}$，$\leqslant$是二元关系，也称$\leqslant$为序关系，以$x\leqslant y$ 记$\leqslant(x, y)$. 考虑下列句子：

(1) $x\leqslant x$，自反性；

(2) $x\leqslant y\wedge y\leqslant x\rightarrow x\equiv y$，反对称性；

(3) $x\leqslant y\wedge y\leqslant z\rightarrow x\leqslant z$，传递性；

$\mathscr{L}$ 的模型 $\mathscr{U}=\langle A, \leqslant\rangle$ 如果满足句子 (1)，(2) 和 (3) 称 $\mathscr{U}$ 是一个**偏序**，或称$\leqslant$是 A 的一个偏序。

(4) $x\leqslant y\vee y\leqslant x$；

模型 $\mathscr{U}$ 是偏序且满足 (4) 则 $\mathscr{U}$ 称为**全序**，或**线性序**，也叫良序。

(5) $\exists xy(x\not\equiv y)$；

(6) $x\leqslant y\wedge x\not\equiv y\rightarrow\exists z(x\leqslant z\wedge z\leqslant y\wedge x\not\equiv z\wedge z\not\equiv y)$；

线性序 $\mathscr{U}$ 还满足 (5)，(6) 就称为**稠密线性序**。

(7) $\exists y(x\leqslant y\wedge x\not\equiv y)$；

(8) $\exists y(y\leqslant x\wedge x\not\equiv y)$.

满足 (7)，(8) 的稠密线性序称为**无端点稠密线性序**。

命题 3.3.1 任意两个可数无限的无端点稠密线性序模型都同构。

证明 设 $\mathscr{U}=\langle A, \leqslant\rangle$，$\mathscr{B}=\langle B, \leqslant\rangle$ 是两个可数无限无

端点稠密线性序模型。先依任意一法枚举 A，B：

a_0，a_1，a_2，…

b_0，b_1，b_2，…

我们归纳地定义 A，B 的重排

a'_0，a'_1，a'_2，…

b'_0，b'_1，b'_2，…

使对任意 i，$j<\omega$，$a'_i\leqslant a'_j$ 当且仅当 $b'_i\leqslant b'_j$. 令 $a'_0=a_0$，$b'_0=b_0$，设对任意 $i<n$，a'_i，b'_i 已定义。

若 $n=2k$，令 $a'_n=a_k$，如果存在某 $i<n$，使 $a'_n=a'_i$，则令 $b'_n=b'_i$，否则 a'_n 把 $\{a'_0, \cdots, a'_{n-1}\}$ 划分成两个部分 s_1 和 s_2. $a'_i\in s_1$ 当且仅当 $a'_i\leqslant a'_n$，$a'_j\in s_2$ 当且仅当 $a'_n\leqslant a'_j$，对应地把 $\{b'_0, \cdots, b'_{n-1}\}$ 划分为两部分 s'_1 和 s'_2，$b'_i\in s'_1$ 当且仅当 $a'_i\in s_1$，$b'_i\in s'_2$ 当且仅当 $a'_i\in s_2$. 易见 $s'_1\cap s'_2=\varnothing$，任意 $b'_i\in s'_1$，$b'_j\in s'_2$ 有 $b'_i\leqslant b'_j$，且 $b'_i\neq b'_j$，由 $\mathscr{B}$ 是无端点稠密线性序知存在 t，$n<t<\omega$，使 $b_t\in B$，对任意 $b'_i\in s'_1$，有 $b'_i\leqslant b_t$，任意 $b'_j\in s'_2$，$b_t\leqslant b'_j$。令 $b'_n=b_t$，由 b'_n 的取法不难看出 $\{a'_0\cdots a'_n\}$ 和 $\{b'_0\cdots b'_n\}$ 有相同的序关系，即 i，$j\leqslant n$，$a'_i\leqslant a'_j$ 当且仅当 $b'_i\leqslant b'_j$.

当 $n=2k+1$ 时，令 $b'_n=b_k$. 如上可以取到 a'_n 使 $\{a'_0\cdots a'_n\}$ 与 $\{b'_0\cdots b'_n\}$ 的序关系相同。

这样我们得到 A，B 的枚举 a'_0，a'_1，a'_2，…及 b'_0，b'_1，b'_2，…. 令 f：$A\to B$，对任意 $n<\omega$，$f(a'_n)=b'_n$. 则 f 是 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{B}$ 的同构对应。 ▌

命题 3.3.1 的方法被称为 Cantor **过来过去方法**，在模型论中这是一个常用的方法。

例 5 $\mathscr{L}=\{+, 0\}$，其中+是二元函数符号，0 是常量符号。如果模型 $\mathscr{U}=\langle G, +, 0\rangle$ 满足下列句子集：

(1) $(x+y)+z\equiv x+(y+z)$ （结合律）

(2) $x+0\equiv x\wedge 0+x\equiv x$ （0 是加法单位元）

(3) $\exists y(x+y\equiv 0\wedge y+x\equiv 0)$（有逆元）

则称 u 是群，有时也称 G 是群，如果 $\mathscr{U}$ 还满足

(4) $x+y\equiv y+x$ （交换律）

则称 $\mathscr{U}$ 是**交换群**，或**可换群**，也称为 **Abel 群**. 如果 $\mathscr{U}$ 还满足

(5) $nx\equiv 0$，即 $\underbrace{x+x+\cdots+x}_{n个}\equiv 0$，$n<\omega$ 则称 $\mathscr{U}$ 是 **n 阶群**.

设 $\mathscr{U}$ 是 Abel 群，对任意 $n<\omega$，$\mathscr{U}$ 满足

(6) $x\not\equiv 0\to nx\not\equiv 0$

则 $\mathscr{U}$ 称为**无扭群**。

如果 $\mathscr{U}$ 是 Abel 群，任意 $n<\omega$，$\mathscr{U}$ 满足

(7) $\exists y(ny\equiv x)$

则称 $\mathscr{U}$ 是**可除群**。

例 6 $\mathscr{L}=\{+,\ \cdot,\ 0,\ 1\}$，$+$，$\cdot$ 是二元函数符号，0，1 是常量符号，设 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{L}$ 的模型满足上例中句子 (1)，(2)，(3) 和 (4)，此外 $\mathscr{U}$ 还满足

(1) $1\cdot x\equiv x\cdot 1$ (1 是乘法单位元)

(2) $x\cdot(y\cdot z)\equiv(x\cdot y)\cdot z$（结合律）

(3) $x\cdot y\equiv y\cdot x$（乘法交换律）

(4) $x\cdot(y+z)\equiv x\cdot y+x\cdot z$（乘法对加法的分配律）

称 $\mathscr{U}$ 为**可换环**。如果可换环 $\mathscr{U}$ 还满足

(5) $x\cdot y\equiv 0\to x\equiv 0\vee y\equiv 0$

则称 $\mathscr{U}$ 为**无零因子**可换环（**整环**）。如果 $\mathscr{U}$ 还满足

(6) $0\not\equiv 1$

(7) $(x\not\equiv 0\to\exists y\ (xy\equiv 1))$

则称 $\mathscr{U}$ 为**域**。设 p 是某素数，$\mathscr{U}$ 满足

(8) $p\cdot 1\equiv 0$，即 $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{p个}\equiv 0$

称 $\mathscr{U}$ 是**特征 p** 的域。如果对任意素数 p，$\mathscr{U}$ 都不满足 (8)，则称 $\mathscr{U}$ 为特征 0 的域。

例 7 $\mathscr{L}=\{+,\cdot,S,0\}$，$+$，$\cdot$ 是二元函数符号，S 是一元函数符号，称 S 为后继函数，0 是常量符号。$\mathscr{L}$ 的句子集

(1) $0\not\equiv Sx$

(2) $Sx\equiv Sy\rightarrow x\equiv y$

(3) $x+0\equiv x$

(4) $x+Sy\equiv S(x+y)$

(5) $x\cdot 0\equiv 0$

(6) $x\cdot Sy\equiv x\cdot y+x$

对 $\mathscr{L}$ 的任意公式 φ $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$

(7) $\varphi(0x_1\cdots x_n)\wedge(\forall x(\varphi(x,x_1\cdots x_n)\rightarrow\varphi(Sx,x_1\cdots x_n)))\rightarrow\forall x\varphi(xx_1\cdots x_n)$

被称为是 **Peano 算术公理**，模型 $\mathscr{U}=\langle N,+,\cdot,S,0\rangle$ 称为**标准算术模型**，其中 N 是自然数集，$+$，$\cdot$ 是普通自然数加法和乘法，S 是后继函数，$Sx=x+1$，0 是通常的自然数零，显然 $\mathscr{U}$ 满足 Peano 公理集。对任意满足 Peano 公理而与 $\mathscr{U}$ 不同构的模型称为**非标准算术模型**。

例 8 $\mathscr{L}=\{+,\cdot,-,0,1\}$，$+$，$\cdot$ 是二元函数符号，$-$ 是一元函数符号，称为补运算，0，1 是常量符号。

(1) $x+(y+z)\equiv(x+y)+z$，$x\cdot(y\cdot z)\equiv(x\cdot y)\cdot z$（结合律）

(2) $x+y\equiv y+x$，$x\cdot y\equiv y\cdot x$（交换律）

(3) $x+x\equiv x$，$x\cdot x\equiv x$（幂等律）

(4) $x+(x\cdot y)\equiv x$，$x\cdot(x+y)=x$（吸收律）

(5) $x+(y\cdot z)=(x+y)\cdot(x+z)$，$x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$（分配律）

(6) $\overline{x+y}=\overline{x}\cdot\overline{y}$，$\overline{x\cdot y}=\overline{x}+\overline{y}$（德摩根律）

(7) $0\not\equiv 1$，$x+0\equiv x$，$x+1\equiv 1$，$x\cdot 0\equiv 0$，$x\cdot 1\equiv x$，$\overline{1}\equiv 0$，$\overline{0}\equiv 1$（0,1 律）

(8) $x+\bar{x}\equiv 1$，$x\cdot\bar{x}\equiv 0$，$\bar{\bar{x}}\equiv x$（补余律）

上列句子中（1），（2），（3），（4）称为格公理，（1）—（5）称为分配格公理，（1）—（8）称为布尔代数公理，模型 $\mathscr{U}$ 满足这些公理就称为**格**，**分配格**或**布尔代数**。

设 I 是一个非空集合，$A=P(I)$ 是 I 的幂集，令 $\mathscr{U}=\langle A, \cup, \cap, -, \varnothing, I\rangle$，$\cup$，$\cap$，$-$ 是集合的并，交和补运算，$\varnothing$ 是空集，I 是合集，则 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{L}$ 的模型，$\mathscr{U}$ 满足（1）—（8），因此 $\mathscr{U}$ 是布尔代数。

第四章 紧致性定理

§4.1 一阶逻辑的完全性

设 φ 是形式语言 $\mathscr{L}$ 的一个句子，1930 年 Gödel 证明了如果 φ 是和谐的，则 φ 有一个模型。这就是 Gödel 完全性定理。1949 年 Henkin 用**常量方法**证明 $\mathscr{L}$ 的一个句子集 T 如果是和谐的，则 T 有模型，这就把 Gödel 完全性定理推广到了一般形式。本节给出完全性定理的 Henkin 证明。这个证明给出了模型论的一个重要方法：常量方法。

定义 设 T 是 $\mathscr{L}$ 的句子集，C 是 $\mathscr{L}$ 中一集常量符号，称 C 是 $\mathscr{L}$ 中 T 的**证据集**，如果对 $\mathscr{L}$ 的每个公式 $\varphi(x)$，有常量符号 $c\in C$，使

$$T\vdash\exists x\varphi(x)\to\varphi(c)$$

如果在 $\mathscr{L}$ 中 T 有证据集 C，就称 T 在 $\mathscr{L}$ 中有**证据**，简称 T 有证据。

容易看出，如果 T 有证据，$T'\supset T$，则 T' 也有证据。

引理 4.1.1 设 T 是 $\mathscr{L}$ 的和谐句子集，C 是一集新常量符号，$|C|=\|\mathscr{L}\|$，$\overline{\mathscr{L}}=\mathscr{L}\cup C$ 是 $\mathscr{L}$ 的膨胀语言，则存在 $\overline{\mathscr{L}}$ 中和谐句子集 $\overline{T}$，使 $T\subset\overline{T}$，$\overline{T}$ 在 $\overline{\mathscr{L}}$ 中以 C 为证据集。

证明 设 $\|\mathscr{L}\|=\alpha$，则 $|C|=\alpha$，枚举 C 中全体新常量符号为 $c_0, c_1, \cdots, c_\xi, \cdots$，$\xi<\alpha$，使任意 ξ，$\zeta<\alpha$，$\xi\neq\zeta$ 时，$c_\xi\neq c_\zeta$，易见 $\|\overline{\mathscr{L}}\|=\alpha$，列出 $\overline{\mathscr{L}}$ 中全部句子 φ_ξ，$\xi<\alpha$。我们来构造 $\overline{\mathscr{L}}$ 中句子集的一个递增序列：

$$T=T_0\subset T_1\subset\cdots\subset T_\xi\subset\cdots\quad \xi<\alpha \qquad (1)$$

并定义 C 的一个重排 d_ξ，$\xi<\alpha$，使

(i) 每个 $\xi<\alpha$，T_ξ 是 $\overline{\mathscr{L}}$ 中和谐句子集；

(ii) 若 $\zeta=\xi+1$，$T_\xi\cup\{\varphi_\xi\}$ 不和谐，则令 $T_\zeta=T_\xi$；否则 $T_\xi\cup\{\varphi_\xi\}$ 和谐而 φ_ξ 不是 $\exists x\psi(x)$ 形句子，就令 $T_\zeta=T_\xi\cup\{\varphi_\xi\}$. 若 $T_\xi\cup\{\varphi_\xi\}$ 和谐，且 φ_ξ 还是 $\exists x\psi(x)$ 形句子，便令

$T_\zeta=T_\xi\cup\{\varphi_\xi\}\cup\{\exists x\psi(x)\to\psi(d_\xi)\}$，其中 d_ξ 是取不在 T_ξ 及 φ_ξ 中出现的 c_0，c_1，…，c_ξ，…中第一个常量符号。

(iii) 如果 ζ 是极限序数，就令 $T_\zeta=\bigcup\limits_{\xi<\zeta}T_\xi$.

我们证明这个构造是可行的。设 T_ξ 已构造，由 (1) T_ξ 和谐，若 $T_\xi\cup\{\varphi_\xi\}$ 不和谐，则 $T_{\xi+1}=T_\xi$ 也和谐。若 $T_\xi\cup\{\varphi_\xi\}$ 和谐，而 φ_ξ 不是 $\exists x\psi(x)$ 形，则 $T_{\xi+1}=T_\xi\cup\{\varphi_\xi\}$ 也和谐。若 $T_\xi\cup\{\varphi_\xi\}$ 和谐而 φ_ξ 是 $\exists x\psi(x)$ 形句子，由于 T_ξ 中每次新添的句子数不多于 2 个，而每个句子中至多只含有限多个 C 中常量，因此，T_ξ 中的新常量少于 α 个，C 中还有不在 T_ξ 及 φ_ξ 中出现的常量，可以取第一个这样的常量为 d_ξ，现在证明 $T_{\xi+1}=T_\xi\cup\{\varphi_\xi\}\cup\{\exists x\psi(x)\to\psi(d_\xi)\}$ 和谐。设 $T_{\xi+1}$ 不和谐，由命题2. 2. 10有 $T_\xi\cup\{\varphi_\xi\}\vdash\neg(\exists x\psi(x)\to\psi(d_\xi))$，由命题演算易知有 $T_\xi\cup\{\varphi_\xi\}\vdash\neg\psi(d_\xi)$，其中 d_ξ 不在 T_ξ 及 φ_ξ 中出现，由命题 2. 2. 2，$T_\xi\cup\{\varphi_\xi\}\vdash\forall x\neg\psi(x)$ 即 $T_\xi\cup\{\varphi_\xi\}\vdash\neg\exists x\psi(x)$，$T_\xi\cup\{\varphi_\xi\}\vdash\neg\varphi_\xi$，因而 T_ξ 不和谐，矛盾。这样 $T_{\xi+1}$ 是和谐的。

若 ξ 是极限序数，$T_\zeta=\bigcup\limits_{\xi<\zeta}T_\xi$. 由于 T_ξ，$\xi<\zeta$ 是递增序列，T_ζ 的每个有限子集都是某个 T_ξ，$\xi<\zeta$ 的子集，是和谐的，因此 T_ζ 和谐。

综上所述，(1) 的构造是可行的。这样我们得到 $\overline{\mathscr{L}}$ 的句子集的递增序列 (1)。令 $\overline{T}=\bigcup\limits_{\zeta<\alpha}T_\xi$ 则 $\overline{T}$ 是 $\overline{\mathscr{L}}$ 的和谐句子集，$T\subset\overline{T}$.
设 $\exists x\psi(x)$ 是 $\overline{\mathscr{L}}$ 中一句子，如果 $\overline{T}\nvdash\exists x\psi(x)$，则对任意 $c\in C$ 有 $\overline{T}\vdash\exists x\psi(x)\to\psi(c)$，若 $\overline{T}\vdash\exists x\psi(x)$，这时有某个 $\xi<\alpha$，使 $\varphi_\xi=\exists x\psi(x)$，且 $T_\xi\cup\{\varphi_\xi\}$ 和谐，因此

$T_{\xi+1}=T_\xi\cup\{\varphi_\xi\}\cup\{\exists x\psi(x)\to\psi(d_\xi)\}$，这样 $\overline{T}\vdash\exists x\psi(x)\to\psi(d_\xi)$，

而 $d_\xi \in c$. 这样 $\overline{T}$ 在 $\overline{\mathscr{L}}$ 中以 C 为证据。 ▌

引理 4.1.2 设 T 是 $\mathscr{L}$ 的和谐句子集，C 是 T 的证据集，则 T 有模型 $\mathscr{U}$，且 $\mathscr{U}$ 的论域 A 中每个元素都是 C 中某常量符号的解释。

证明 不妨设 T 是 $\mathscr{L}$ 的极大和谐句子集，T 仍以 C 为证据集。我们定义 C 中元素的一个关系"$\sim$"，对任意常量符号 c，$d \in C$，$c \sim d$ 当且仅当 $c \equiv d \in T$. 由于 T 是极大和谐句子集，容易证明关系$\sim$满足下列条件，即对任意 c，d，$e \in C$，有

（1）$c \sim c$；（2）若 $c \sim d$ 则 $d \sim c$；（3）若 $c \sim d$，$d \sim e$，则$c \sim e$. 这样$\sim$是 C 的一个等价关系。令 $A = \{\tilde{c} : c \in C\}$，其中 $\tilde{c} = \{d \in C : d \sim c\}$ 是 c 的等价类。我们在 A 上定义关系，函数和常量作 $\mathscr{L}$ 中关系，函数和常量符号的解释，使之构成 $\mathscr{L}$ 的模型。

（1）设 R_i，$i \in I$，是 $\mathscr{L}$ 的 n 元关系符号．任意元素 $\tilde{c}_1$，$\cdots$，$\tilde{c}_n \in A$.

$R_i(\tilde{c}_1, \cdots, \tilde{c}_n)$ 成立当且仅当 $R_i(c_1 \cdots c_n) \in T$.

（2）设 F_j，$j \in J$，是 $\mathscr{L}$ 的 m 元关系符号，对任意 $\tilde{c}_1$，$\cdots$，$\tilde{c}_m \in A$，必有 $c \in C$，使 $F_j(c_1 \cdots c_m) \equiv c \in T$，令

$F_j(\tilde{c}_1, \cdots, \tilde{c}_m) = \tilde{c}$

（3）设 d_k，$k \in K$，是 $\mathscr{L}$ 的常量符号，则存在 $c \in C$，使 $d_k \equiv c \in T$，令 d_k 在论域 A 中的解释为 $\tilde{c}$.

我们必须证明上述定义是可行的。首先要证明定义与每个等价类的代表元的选择无关。设（1）中 c_1，$\cdots$，c_n 与 c_1'，$\cdots$，c_n' 都是 $\tilde{c}_1$，$\cdots$，$\tilde{c}_n$ 的代表元，即 $c_1 \sim c_1'$，$\cdots$，$c_n \sim c_n'$. 于是有 $c_1 \equiv c_1'$，$\cdots$，$c_n \equiv c_n' \in T$. 由 $\mathscr{L}$ 的公理 $Ax7$ 有

$\vdash c_1 \equiv c_1' \to \cdots \to c_n \equiv c_n' \to R_i\ (c_1,\ \cdots,\ c_n) \leftrightarrow R_i\ (c_1',\ \cdots,\ c_n')$

因此，$R_i\ (c_1,\ \cdots,\ c_n) \in T$ 当且仅当 $R_i\ (c'_1,\ \cdots,\ c'_n) \in T$，从而有 $R_i(\tilde{c}_1,\ \cdots,\ \tilde{c}_n)$ 成立与代表元选择无关。(2)、(3) 中类似可证定义与等价类的代表元选法无关。

我们还要证定义（2），（3）中 $\tilde{c}$ 的存在性与唯一性。（2）中 $F_j(c_1, \cdots, c_m)$ 是 $\mathscr{L}$ 的一个项，由 § 2.2 例 4，有 $\vdash \exists x(F_j(c_1,\cdots,c_m)\equiv x)$. 由 C 是 T 的证据集知存在 $c\in C$，使 $T\vdash \exists x(F_j(c_1,\cdots,c_m)\equiv x)\rightarrow F_j(c_1,\cdots,c_m)\equiv c$. 因此 $T\vdash F_j(c_1,\cdots,c_m)\equiv c, F_j(c_1,\cdots,c_m)\equiv c\in T$。如果存在 c，c' 使 $F_j(c_1,\cdots c_m)\equiv c$，$F_j(c_1,\cdots,c_m)\equiv c'\in T$，则由 $Ax7$ 可证明 $c\equiv c'\in T$. 这样 $c\sim c'$，$\tilde{c}=\tilde{c}'$.（3）中 c 的存在性与 $\tilde{c}$ 的唯一性类似可证。

现在，我们定义了以 A 为论域的一个模型 $\mathscr{U}=\langle A, \{R_i\}_{i\in I}, \{F_j\}_{j\in J}, \{d_k\}_{k\in K}\rangle$. 不难看出对 $\mathscr{L}$ 中常量 $c\in C$，c 在 A 中的解释是 $\tilde{c}$，即 c 自己所在的等价类。下面对 $\mathscr{L}$ 中句子的复杂性加以证明。

$\mathscr{U}\models\varphi$ 当且仅当 $\varphi\in T$.

（4）设 t 是 $\mathscr{L}$ 的一个闭项，即 t 中不含变元符号，则存在 $c\in C$、使 $\mathscr{U}\models t\equiv c$ 且 $t\equiv c\in T$.

设 t 是某个体常量，则由（3）知存在 $c\in C$，$t\equiv c\in T$，t 在 $\mathscr{U}$ 中的解释是 $\tilde{c}$，即 $\mathscr{U}\models t\equiv c$. 设 $t=F_j\ (t_1, \cdots, t_m)$，$F_j$ 是 $\mathscr{L}$ 的 m 元函数符号，$t_1,\cdots,t_m$ 是 $\mathscr{L}$ 的闭项。归纳假设存在 $c_1, \cdots, c_m\in C$，使 $\mathscr{U}\models t_1\equiv c_1, \cdots, \mathscr{U}\models t_m\equiv c_m$；$t_1\equiv c_1, \cdots, t_m\equiv c_m\in T$. 由（2）存在 $c\in C$，使 $F_j(c_1,\cdots,c_m)\equiv c\in T$. $F_j(\tilde{c}_1,\cdots,\tilde{c}_m)=\tilde{c}$，即 $\mathscr{U}\models F_j(c_1,\cdots,c_m)\equiv c$. 由公理 $Ax8$ 可以证明 $F_j(t_1,\cdots t_m)\equiv c\in T$ 及 $\mathscr{U}\models F_j(t_1,\cdots,t_m)\equiv c$.

（5）设 t_1，t_2 是 $\mathscr{L}$ 的两个闭项，则

$\mathscr{U}\models t_1\equiv t_2$ 当且仅当 $t_1\equiv t_2\in T$.

由（4）存在 $c_1, c_2\in C$，$\mathscr{U}\models t_1\equiv c_1$，$\mathscr{U}\models t_2\equiv c_2$，且 $t_1\equiv c_1, t_2\equiv c_2\in T$.

设 $\mathscr{U}\models t_1\equiv t_2$，则 $\mathscr{U}\models c_1\equiv c_2$，$\tilde{c}_1=\tilde{c}_2$，$c_1\sim c_2$，因此 $c_1\equiv c_2\in T$，容易证明 $t_1\equiv t_2\in T$.

设 $t_1\equiv t_2\in T$，则 $c_1\equiv c_2\in T$，也可证 $\mathscr{U}\models c_1\equiv c_2$，因而 $\mathscr{U}\models t_1\equiv t_2$.

(6) 设 R_i 是 $\mathscr{L}$ 的 n 元关系符号，t_1, …, t_n 是 $\mathscr{L}$ 的闭项，则

$\mathscr{U}\models R_i(t_1, \cdots, t_n)$ 当且仅当 $R_i(t_1,\cdots,t_n)\in T$.

由 (4)存在 c_1, …, $c_n\in T$, $\mathscr{U}\models t_i\equiv c_i$, $t_i\equiv c_i\in T$, $i=1$, …, n, 不难证明 (6) 成立。

(7) 设 $\varphi=\neg\psi$，由归纳假设 $\mathscr{U}\models\psi$ 当且仅当 $\psi\in T$，则 $\mathscr{U}\models\varphi$ 当且仅当 $\mathscr{U}\not\models\psi$ 当且仅当 $\psi\notin T$ 当且仅当 $\varphi\in T$.

(8) $\varphi=\psi_1\rightarrow\psi_2$，对 ψ_1，ψ_2 用归纳假设可证。

(9) 设 $\varphi=\exists x\psi(x)$，若 $\mathscr{U}\models\varphi$，则存在 $\bar{c}\in A$，$\mathscr{U}\models\psi\,[\bar{c}]$，即 $c\in C$，$\mathscr{U}\models\psi(c)$，由归纳假设 $\psi(c)\in T$，由 §2.2 例 3 $\vdash\psi(c)\rightarrow\exists x\psi(x)$，则 $\exists x\psi(x)\in T$. 反过来，若 $\exists x\psi(x)\in T$，由 C 是 T 的证据集，知存在 $c\in C$，$T\vdash\exists x\psi(x)\rightarrow\psi(c)$，则 $\psi(c)\in T$，由归纳假设 $\mathscr{U}\models\varphi(c)$，这样也有 $\mathscr{U}\models\exists x\psi(x)$.（利用 (9) 可以证明 $\varphi=\forall x\varphi(x)$ 的情形也成立。）

至此，我们完成了 $\mathscr{U}\models\varphi$ 当且仅当 $\varphi\in T$ 的证明。显然 $\mathscr{U}\models T$. ∎

作为引理 4.1.2 的逆命题，我们有：

引理 4.1.3 设 C 是 $\mathscr{L}$ 的一集常量符号，T 是 $\mathscr{L}$ 的句子集，$\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{L}$ 的模型。如果 $\mathscr{U}\models T$，$\mathscr{U}$ 的论域 A 中每个元素都是某个常量符号 $c\in C$ 的解释，则 T 可以扩充到和谐句子集 $\overline{T}$，$\overline{T}$ 以 C 为证据集。

证明 令 $\mathrm{Th}\mathscr{U}=\{\varphi$: φ 是 $\mathscr{L}$ 的句子，$\mathscr{U}\models\varphi\}$，即 $\mathrm{Th}\mathscr{U}$ 是被 $\mathscr{U}$ 满足的 $\mathscr{L}$ 的全体句子的集合。$\mathrm{Th}\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{L}$ 的一个极大和谐句子集，取 $\overline{T}=\mathrm{Th}\mathscr{U}$，对 $\mathscr{L}$ 中任意 $\exists x\psi(x)$ 形句子，若 $\overline{T}\vdash\exists x\psi(x)$，则 $\exists x\psi(x)\in\overline{T}$，$\mathscr{U}\models\exists x\psi(x)$，于是存在 $a\in A$，$\mathscr{U}\models\psi[a]$，但 a 是某 $c\in C$ 的解释，从而 $\mathscr{U}\models\psi(c)$，$\psi(c)\in\overline{T}$，因此 $\overline{T}\vdash\exists x\psi(x)\rightarrow\psi(c)$。若 $\overline{T}\nvdash\exists x\psi(x)$，则 $\overline{T}\cup\{\neg\exists x\psi(x)\}$ 和谐，$\neg\exists x\psi(x)\in\overline{T}$，自然有 $\overline{T}\cup\{\exists x\psi(x)\}\vdash\psi(c)$（其中 $c\in C$）$\overline{T}\vdash\exists x\psi(x)\rightarrow\psi(c)$. 这样 $\overline{T}$ 以 C 为证据集. ∎

定理 4.1.4 （广义完全性定理） 设 T 是 $\mathscr{L}$ 的句子集，T 和谐当且仅当 T 有模型。

证明 由定理 3.1.5 已知 T 有模型则 T 和谐。设 T 和谐，由引理 4.1.1，存在语言 $\overline{\mathscr{L}}=\mathscr{L}\cup C$，$|C|=\|\mathscr{L}\|$，存在 $\overline{\mathscr{L}}$ 的句子集 $\overline{T}$，$T\subset\overline{T}$，$\overline{T}$ 在 $\overline{\mathscr{L}}$ 中有证据 C，由引理 4.1.2，$\overline{\mathscr{L}}$ 中有模型 $\mathscr{U}$，$\mathscr{U}\models\overline{T}$，令 $\mathscr{U}'$ 是 $\mathscr{U}$ 在 $\mathscr{L}$ 中的归约模型，则有 $\mathscr{U}'\models T$. ▌

推论 4.1.5 设 T 是 $\mathscr{L}$ 的和谐理论，则 T 有势小于等于 $\|\mathscr{L}\|$ 的模型.

证明 定理 4.1.4 中模型 $\mathscr{U}'$ 与 $\mathscr{U}$ 有相同的论域 A，A 中每个元素都是某 $c\in C$ 的解释，这样 $|A|\leqslant|C|\leqslant\|\mathscr{L}\|$. ▌

形式语言 $\mathscr{L}$ 中一句子 φ，如果 φ 在 $\mathscr{L}$ 的每个模型中都满足，就称 φ 是恒真句子，记作 $\models\varphi$. 设 T 是 $\mathscr{L}$ 的句子集，φ 是 $\mathscr{L}$ 的句子，如果 T 的每个模型都是 φ 的模型，记作 $T\models\varphi$.

推论 4.1.6 （Gödel 完全性定理） 设 φ 是 $\mathscr{L}$ 的句子，φ 是 $\mathscr{L}$ 的定理当且仅当 φ 是 $\mathscr{L}$ 的恒真句，即 $\vdash\varphi$ 当且仅当 $\models\varphi$.

证明 设 $\vdash\varphi$，由推论 3.1.4 知必有 $\models\varphi$. 反之若 $\nvdash\varphi$ 即 φ 不是 $\mathscr{L}$ 的定理，则 $\neg\varphi$ 和谐。由定理 4.1.4，有模型 $\mathscr{U}\models\neg\varphi$，因此 $\not\models\varphi$. ▌

推论 4.1.7 $T\vdash\varphi$ 当且仅当 $T\models\varphi$.

证明 也只需证一个方向。若 $T\nvdash\varphi$，则 $T\cup\{\neg\varphi\}$ 和谐，有模型 $\mathscr{U}\models T$，$\mathscr{U}\models\neg\varphi$，则 $\mathscr{U}\not\models\varphi$. 因而 $T\not\models\varphi$. ▌

§4.2 紧致性定理

紧致性定理和下节的 Löwenheim—Skolem—Tarski 定理是一阶逻辑模型论的特征。而紧致性定理尤其是一阶模型论的基础。整个一阶模型论几乎都可以看成是紧致性定理的推论。除了在模型论中之外，紧致性定理还有许多应用。著名的非标准分析就是由应用紧致性定理而得到的非 Archimed 序域上导出的。本节中

我们将给出应用紧致性定理的几个有趣的例子。

定理 4.2.1（紧致性定理） 句子集 Σ 有模型当且仅当 Σ 的每个有限子集有模型。

证明： 显然只需证一个方向。设 Σ 的每个有限子集有模型，则 Σ 的每个有限子集都和谐，因此 Σ 和谐，由完全性定理，Σ 有模型。 ▍

形式语言的一个句子集常被称为**理论**。称一个理论是**可满足的**，如果它有模型。由完全性定理，理论是可满足的也就是和谐的，因此，紧致性定理也可以叙述为：一个理论 T 是可满足的当且仅当 T 的每个有限子集是可满足的，即 T 是**有限可满足的**。

定理 4.2.2 设理论 T 有任意大有限模型，则 T 有一个无限模型。

证明 令

$$\sigma_n = \exists v_0 \cdots v_{n-1}(v_0 \neq v_1 \wedge \cdots \wedge v_0 \neq v_{n-1} \wedge \cdots \wedge v_{n-2} \neq v_{n-1}),$$

σ_n 意为存在 n 个互不相同的元素。令 $\Sigma = \{\sigma_n : n < \omega\}$，由题设易见 $T \cup \Sigma$ 有限可满足，由紧致性定理 $T \cup \Sigma$ 有模型 $\mathscr{U}$，$\mathscr{U} \models T \cup \Sigma$. 而由 $\mathscr{U} \models \Sigma$ 知 $\mathscr{U}$ 是无限模型。 ▍

由定理 4.2.2 立即得到如下推论：

推论 4.2.3 不存在形式语言的一个理论 T，使对任意模型 $\mathscr{U}$，$\mathscr{U} \models T$ 当且仅当 $\mathscr{U}$ 有限。

这个推论说明一阶形式语言无法刻划“有限”这个性质。我们从这里看到一阶语言并不是万能的，它有相当大的局限性。

称句子集 Σ 是理论 T 的一组（非逻辑的）**公理**，如果 $\Sigma \vdash T$，且 $T \vdash \Sigma$. 由完全性定理，若 Σ 是 T 的公理，则 $\Sigma \models T$，$T \models \Sigma$，即 Σ 与 T 有相同的模型，如果 T 有一公理集 Σ 而 Σ 有限，则称 T **有限可公理化**。如果 T 有限可公理化，通过合取可使 T 的有限条公理合成一个句子，则 T 有只含一个句子的公理集。

推论 4.2.4 设理论 $\Sigma = \{\sigma_n : n < \omega\}$，其中 σ_n 是定理 4.2.2

中给出的句子，则 Σ 不可有限公理化。

证明 如果 Σ 有限可公理化，即存在句子 φ, $\varphi\models\Sigma$, $\Sigma\models\varphi$, 则 $\mathscr{U}\models\varphi$ 当且仅当 $\mathscr{U}$ 无限。这样 $\mathscr{U}\models\neg\varphi$ 当且仅当 $\mathscr{U}$ 有限，与推论 2.2.3 矛盾。 ▎

推论 4.2.4 说明不能用一阶语言中的一个有限长的句子来刻划无限这个性质。

下面一个定理是著名的 Löwenheim-Skolem-Tarski 定理，简称 L-S-T 定理。

定理 4.2.5 （**L—S—T 定理**）如果理论 T 有无限模型，则对任意一个基数 α, $\alpha\geqslant\|\mathscr{L}\|$, T 有势为 α 的模型。

证明 令 $\mathscr{L}$ 是理论 T 的语言，c_ξ, $\xi<\alpha$, 是不在 $\mathscr{L}$ 中出现的新常量符号。令 $\mathscr{L}'=\mathscr{L}\cup\{c_\xi:\xi<\alpha\}$, $\Sigma=T\cup\{c_\xi\neq c_\eta:\xi<\eta<\alpha\}$，由 T 有无限模型易见 Σ 有限可满足，由紧致性定理 Σ 有模型，由推论 4.1.5，Σ 有模型 $\mathscr{U}$, $|A|\leqslant\|\mathscr{L}'\|=\alpha$, 而由 $\mathscr{U}\models c_\xi\neq c_\eta$, $\xi<\eta<\alpha$, $|A|\geqslant\alpha$, 因此 $|A|=\alpha$. 则 $\mathscr{U}$ 在 $\mathscr{L}$ 中的归约模型 $\mathscr{U}'\models T$, $\mathscr{U}'$ 的论域仍是 A，即 $\mathscr{U}'$ 是势为 α 的模型。 ▎

我们也称推论 4.1.5 为降 L-S-T 定理，而把定理 4—2—5 称为升 L—S—T 定理。下节我们还要讨论更强形式的升降 L—S—T 定理。

设 $\mathscr{L}=\{R\}$, R 是二元关系符。$\mathscr{L}$ 的模型 $\mathscr{U}=\langle A, R\rangle$ 被称为是**良序**，如果 R 是论域 A 的良序关系，即对 A 的任意子集 B，存在元素 $a\in B$，对任意 $b\in B$，有 aRb,（即 $R(a, b)$,）称 a 是 B 的关于 R 的最小元。集合论有一个著名结论：选择公理 AC 与良序公理等价。良序公理即每个集合都可以良序。而我们可以用紧致性定理证明：良序不是一阶语言可以刻划的性质。

定理 4.2.6 设 $\mathscr{L}=\{R\}$, R 是二元关系符号，$\mathscr{L}$ 中不存在句子集 Σ，使 Σ 有无限模型，而对 $\mathscr{L}$ 的任意模型 $\mathscr{U}$, $\mathscr{U}\models\Sigma$ 当且仅当 $\mathscr{U}$ 是良序。

证明 设存在定理中所说的句子集 Σ，我们证明必定有一个无限模型 $\mathscr{B}\models\Sigma$，$\mathscr{B}$ 不是良序。

令 $\mathscr{L}'=\mathscr{L}\cup\{c_n: n<\omega\}$，其中 c_n 是不在 $\mathscr{L}$ 中出现的新常量。令 $\Sigma'=\Sigma\cup\{c_{n+1}Rc_n\wedge c_n\neq c_{n+1}: n<\omega\}$. 对 Σ'的每个有限子集，Σ 的无限良序模型都可以膨胀为其模型。因此，由紧致性定理，Σ'有模型 $\mathscr{B}'$，$\mathscr{B}'\models\Sigma'$，由 $\mathscr{B}'\models c_n\neq c_{n+1}$，$n<\omega$ 知 $\mathscr{B}'$ 无限。令 $\{b_0, b_1, \cdots b_n, \cdots\}\subseteq B$ 是常量 c_n，$n<\omega$，在 $\mathscr{B}'$ 中的解释，由 $\mathscr{B}'\models c_{n+1}Rc_n$ 可知 $\{b_0, b_1, \cdots b_n, \cdots\}$ 中没有关于 R 的最小元，因此 $\mathscr{B}'$ 不是良序。而 $\mathscr{B}'$ 在 $\mathscr{L}$ 上的归约 $\mathscr{B}$ 仍是 Σ 的模型，$\mathscr{B}$ 不是良序。▍

令 $\mathscr{L}=\{+, \cdot, S, 0\}$，§3.3 中例 7 给出了 Peano 算术公理。称 $\mathscr{U}=\langle N, +, \cdot, S, 0\rangle$ 是 Peano 算术的标准模型，称 $\mathrm{Th}\mathscr{U}$ 为完全数论，如果有模型 $\mathscr{B}$，$\mathscr{B}\models\mathrm{Th}\mathscr{U}$，而 $\mathscr{B}\not\cong\mathscr{U}$，则称 $\mathscr{B}$ 为非标准算术模型。由定理 4.2.5 已知道 $\mathrm{Th}\mathscr{U}$ 存在充分大的模型，例如不可数模型，当然不能与 $\mathscr{U}$ 同构。因此完全数论有不可数的非标准模型。现在我们来证明存在完全数论的可数的非标准模型。这是由 Skolem1934 年最先证明的。

定理 4.2.7 设 $\mathscr{L}=\{+, \cdot, S, 0\}$. $\mathscr{L}$ 中存在完全数论的可数非标准模型。

证明 令 $\mathscr{L}'=\mathscr{L}\cup\{c\}$. c 是一个新常量。令

$T=\mathrm{Th}\mathscr{U}\cup\{c\neq n: n$ 是$\underbrace{S\cdots S}_{n个}0$ 的缩写，$n<\omega\}$. 其中 $\mathrm{Th}\mathscr{U}=\{\varphi:\varphi$是 $\mathscr{L}$ 中句子，$\mathscr{U}\models\varphi\}$. 容易看出 T 的每个有限子集 T'都有模型。只要从 $\mathscr{U}$ 中定义一个充分大的 $n\in N$ 为新常量 c 的解释即可使 $\mathscr{U}$ 的膨胀模型成为 T'的模型。由紧致性定理 T 有模型，由定理 4.1.5，T 有势不超过 $\|\mathscr{L}'\|$ 的模型，由 $\|\mathscr{L}'\|=\omega$，知 T 有可数模型 $\mathscr{B}'$，设 c 在 $\mathscr{B}'$中的解释是 $b\in\mathscr{B}'$，令 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{B}'$ 在 $\mathscr{L}$ 中的归约模型。如果有 $f:\mathscr{U}\to\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{B}$ 上的同构对应，则必有 $f(0)=0$，设 $f(n)=n$，则 $f(Sn)=S(f(n))=Sn$. 即$f(n)=n$

对任意 $n<\omega$ 成立。由 $\mathscr{B}'\models c\neq n, n<\omega$ 知 B 中对任意 n 都有 $b\neq n$. 因此 b 不是 A 中任一元素的象。这样 f 不能是同构对应，即 $\mathscr{U}\ncong\mathscr{B}$. 因此 $\mathscr{B}$ 是可数非标准模型。 ▌

令 $\mathscr{L}=\{+, \cdot, 0, 1\}$，§3.3 例 6 给出了域的理论的一组公理. $\mathscr{L}$ 的模型 $\mathscr{U}$ 称为域，如果 $\mathscr{U}$ 满足这些公理。记理论 Γ 为这一组公理. $\mathscr{U}\models\Gamma$，则 $\mathscr{U}$ 是域. 设 p 是有理素数，如果 $\mathscr{U}\models p.1\equiv 0$，则称 $\mathscr{U}$ 是特征 p 的域，这里 $p.1$ 是 $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{p个}$ 的简写。如果对任意有理素数 p，$\mathscr{U}\models p.1\neq 0$，就称 $\mathscr{U}$ 是特征为 0 的域。

定理 4.2.8 设 $\mathscr{L}=\{+, \cdot, 0, 1\}$，$\mathscr{L}$ 中理论 T 有任意大特征的域模型，则 T 有特征为 0 的域模型。

证明 令 $\Sigma=T\cup\Gamma\cup\{p1\neq 0, p$ 是有理素数$\}$，其中 Γ 是域公理。设 $\Sigma'\subseteq\Sigma$ 是 Σ 的有限子集，则 Σ' 中至多含有限多个 $p1\neq 0$，p 有理素数，取一个有理素数 q 大于所有上述 p，取 T 的一个特征 q 的域模型，易见也是 Σ' 的模型。因此 Σ 的每个有限子集可满足，由紧致性定理 Σ 有模型，这个模型是 T 的特征为零的域模型。▌

定理 4.2.9 句子 φ 在任意一个特征为零的域中真，则对任意 $n<\omega$，存在素数 $p>n$，使 φ 在特征 p 的域中真。

证明 用反证法。假设存在 $n<\omega$，对任意有理素数 $p>n$，φ 在特征 p 的域中都不真。令

$$\Sigma=\{\neg\varphi\}\cup\Gamma\cup\{p1\neq 0：p \text{ 有理素数}\}$$

则 Σ 有限可满足，由紧致性定理 Σ 有模型 $\mathscr{U}$，$\mathscr{U}\models\neg\varphi$，即 φ 在 $\mathscr{U}$ 中不成立。$\mathscr{U}\models\Gamma$，即 $\mathscr{U}$ 是域，又对任意有理素数 p，$\mathscr{U}\models p1\neq 0$，即 $\mathscr{U}$ 是特征零的域。这与题设矛盾。 ▌

以上定理 4.2.8 和定理 4.2.9 是近世代数学的一个分支“域论”中极有用的结果。例如域论中的一个方程，或方程组在任意大特征的域中有解，则必在某特征为零的域中有解。如其在任意

特征为零的域中有解，则存在充分大的有理素数 p，使方程在特征 p 的域中有解。

推论 4.2.10 设 $\mathscr{L}=\{+, \cdot, 0, 1\}$，域的特征为零不能在 $\mathscr{L}$ 中有限公理化。

证明 假设 $\mathscr{L}$ 的句子 φ 表示域的性质“特征为零”，Γ 是域的公理集，令 $T=\Gamma\cup\{\varphi\}$，则 $\mathscr{U}\models T$ 当且仅当 $\mathscr{U}$ 是特征为零的域。因而 φ 在任意特征为零的域中真。由定理 4.2.9 存在某有理素数 p，使 φ 在特征 p 的域中真矛盾。▍

这是继“无限性”后第二个不能有限公理化的例子。

设 $\mathscr{L}=\{+, \cdot, 0, 1, \leqslant\}$，$\Gamma$ 是特征为 0 的域公理以及下列句子组成的理论：

$x\leqslant y\rightarrow x+z\leqslant y+z$

$x\leqslant y\wedge 0\leqslant z\rightarrow x\cdot z\leqslant y\cdot z$

以上两句子中同样省去了句首的全称量词。$\mathscr{L}$ 的任意模型 $\mathscr{U}$，如果 $\mathscr{U}\models\Gamma$，就称 $\mathscr{U}$ 是一个**序域**，元素 $a\in A$ 称为正的，如果 $0\leqslant a$，且 $a\neq 0$。下面这个性质称为**阿基米德（Archimede）性质**：对 $\mathscr{L}$ 的序域中的任意两个正元素 a，b，都存在自然数 n，使 $a\leqslant nb$，满足这个性质的序域 $\mathscr{U}$ 称为**阿基米德序域**。以 R 记全体实数的集合，则**实数序域模型** $\langle R, +, \cdot, 0, 1, \leqslant\rangle$ 是 $\mathscr{L}$ 的一个阿基米德序域。由紧致性定理我们可以证明存在一个与实数序域初等等价的非阿基米德序域。

定理 4.2.11 设 $\mathscr{L}=\{+, \cdot, 0, 1, \leqslant\}$，存在一个与实数序域初等等价的非阿基米德序域。

证明 令 $\mathscr{U}=\langle R, +, \cdot, 0, 1, \leqslant\rangle$，$\mathrm{Th}\mathscr{U}$ 是在 $\mathscr{U}$ 中成立的句子的全体组成的集合。令 $\mathscr{L}'=\mathscr{L}\cup\{c\}$，$c$ 是新常量符号。令 $\Sigma=\Gamma\cup\{n1\leqslant c, n\in\omega\}$，$\Sigma$ 的任意有限子集 Σ' 中至多有有限个 $n1\leqslant c$，$n\in\omega$. 取大于所有这些 n 的一个自然数 n_0，以 n_0 作常量 c 的解释，使 $\mathscr{U}=\langle R, +, \cdot, 0, 1, \leqslant\rangle$ 膨胀为 $\mathscr{L}'$ 的模型 $\mathscr{U}'$，

$\mathscr{U}' = \langle R, +, \cdot, 0, 1, \leqslant, n_0 \rangle$. 不难看出 $\mathscr{U}' \models \Sigma'$. 由紧致性定理，$\Sigma$ 有模型 $\mathscr{B}'$. 常量 c 在 $\mathscr{B}'$ 中有解释 $a \in B$. 对任意 $n \in \omega$, $\mathscr{B}' \models n1 \leqslant c$，因此，对任意 $n \in \omega$, $n \cdot 1 \leqslant a$，这样 $\mathscr{B}'$ 的 $\mathscr{L}$ 归约模型 $\mathscr{B}$ 不满足阿基米德性质。但 $\mathscr{B} \models \mathrm{Th}\mathscr{U}$，即 $\mathscr{U}$ 中成立的任意句子在 $\mathscr{B}$ 中亦成立。这样就有 $\mathscr{U} \equiv \mathscr{B}$. 由此 $\mathscr{B}$ 也是序域模型。 ▌

定理中常量符号 c 的解释 a 大于任意自然数 n，因此也大于任意实数，我们称 c 是模型 $\mathscr{B}$ 的无穷大元。$\mathscr{B}$ 中不止有一个无穷大元. 例如 $2c$, $3c$, c^2 等等，甚至有无穷多个无穷大元。而 $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{2c}$ 等等则成为 $\mathscr{B}$ 的无穷小元。这样，在模型 $\mathscr{B}$ 中可以建立新的无穷小分析理论称为非标准分析。非标准分析是由 A. Robinson 于 1960 年建立的，到现在已经发展成为一门内容丰富的新学科。

由定理 4.2.11 可以看出阿基米德性质不能由一阶语言表示。否则，如果 φ 表示阿基米德性质，φ 在 $\mathscr{U}$ 中成立，因此 φ 在 $\mathscr{B}$ 中也成立，而这是不可能的。

设 $\mathscr{L} = \{\leqslant\}$，§3.3 中例 4 给出偏序和全序理论。

定理 4.2.12 任何一个偏序可扩充为一个全序，即对任意偏序模型 $\mathscr{U} = \langle A, \leqslant \rangle$，存在全序模型 $\mathscr{B}$，使 $\mathscr{B} = \langle A, \leqslant' \rangle$，$\leqslant'$ 是 A 上全序，$\leqslant'$ 保持 $\mathscr{U}$ 的序 $\leqslant$，即对任意 $a, b \in A$，如果 $a \leqslant b$，则 $a \leqslant' b$.

证明 令 T 是例 4 中偏序理论，即句子 (1), (2), (3). 令 T' 是全序理论，即句子 (1), (2), (3) 和 (4). 设 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{L}$ 的一个偏序模型，$\mathscr{U} \models T$. A 的任何非空子集可以构成 $\mathscr{U}$ 的子模型，仍是偏序模型。令 $\mathscr{L}' = \mathscr{L} \cup A = \mathscr{L}_A$，$\mathscr{L}'$ 是把模型 $\mathscr{U}$ 的论域 A 当作新常量集添加到 $\mathscr{L}$ 中得到的膨胀语言，令 $\Sigma = T' \cup \{a \leqslant b$，若 $\mathscr{U}$ 中 $a \leqslant b\}$，任取 Σ 的有限子集 Σ' · Σ' 中只含有新常量 $a_1 \cdots, a_n \in A$. 我们归纳证明 可以在 $\{a, \cdots, a_n\}$ 上建立一个新的

序关系$\leqslant'$，使$\leqslant'$是全序，而且保持原有的序不变，即 $a_i \leqslant a_j \Rightarrow a_i \leqslant' a_j$.

$n=1$ 时，即 Σ' 中只含一个新常量 $\{a_1\}$. 令$\leqslant'$仍是原来的序关系$\leqslant$即可。假设 Σ' 中含有 n 个新常量时结论成立。若 Σ' 中含有 $n+1$ 个常量 $\{a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}\}$，对 $\{a_1, \cdots, a_n\}$ 由归纳假设已有全序关系$\leqslant'$，$\leqslant'$保持原有的序$\leqslant$，比较 a_{n+1}与 $a_1, \cdots, a_n$ 的大小取 $k=\max\{i : a_i \leqslant' a_{n+1}\}$，即 k 是使 $a_i \leqslant' a_{n+1}$成立的最大的下标。现在定义 $a_k \leqslant' a_{n+1}$，$a_{n+1} \leqslant' a_{k+1}$. 这样$\leqslant'$已经是 $\{a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}\}$ 上的一个全序。而且$\leqslant'$保持原有的序关系$\leqslant$不变。归纳完成。

以上归纳可知 Σ' 可满足，由紧致性定理 Σ 可满足。因此 Σ 有模型 $\mathscr{B}'=(\mathscr{B}, a)_{a\in A}$. 由 $\mathscr{B}' \models T'$，$\mathscr{B}'$ 是全序。每个元素 $a\in A$，a 在 $\mathscr{B}'$ 中有解释 $b_a \in B$. 令 $B_0=\{b_a : a\in A\}$，以 B_0 为论域可以构成 $\mathscr{B}$ 的子模型 $\mathscr{B}_0=\langle B_0, \leqslant'\rangle$，$\mathscr{B}_0$ 也是全序。以 a 代替 B_0 中的元素 b_a，得到模型 $\mathscr{B}'_0=\langle A, \leqslant'\rangle$，$\mathscr{B}'_0$ 是以 A 为论域的全序模型。由 Σ' 的构造易见$\leqslant'$保持 $\mathscr{U}$ 的序$\leqslant$. ▌

下面给出紧致性定理在图论中的一个应用。一个地图（平面图）称为是 k 色的，如果用 k 种颜色可以区分地图上各个国家或区域，使相邻的两个区域有不同的颜色。我们用图论的方法来描述 k 色地图。用平面上的点表示地图上的区域，不同的点表示不同的区域；两个区域相邻，则用一条线连接代表这两个区域的点，这样得到一个由点和线段组成的一个图。一个地图是 k 色的，即可以把它对应的图上的点分成 k 个组，同在一组的点之间没有连线。

进一步，我们用形式语言来描述一个图，以及图的 k 色性。令 $\mathscr{L}=\{R\}$，R 是二元关系. $\mathscr{L}$ 的理论 T 是以下两个句子的句子集：

(1) $\neg R(x,x)$

(2) $R(x,y)\rightarrow R(y,x)$

与以前一样，我们省去了 (1)，(2) 句首的全称量词。$\mathscr{L}$ 的一个

模型 $\mathscr{U}=\langle A、R\rangle$ 称为一个图，如果 $\mathscr{U}\models T$. A 的元素是平面上的点，两点 a，b 间有连线当且仅当 $R(a,b)$ 成立。(1) 表示图上没有连接一个点的圈。$R(a,b)$ 也表示区域 a，和 b 相邻。模型 $\mathscr{U}$ 是 k 色的，即 A 可以划分为 k 个不相交的部分 A_1，…，A_k. 对任意 $i\leqslant k$，任意 a，$b\in A_i$，$R(a,b)$ 不成立，即 $\mathscr{U}\models\neg R[a,b]$. 关于 k 色问题，最著名的是 4 色问题，即任意一个地图可以用 4 种颜色区分不同的区域。简言之，每个图都是 4 色的。4 色问题至今尚未得到完满的解决。但这里我们有如下 **k 色定理**。

定理 4.2.13 一个图是 k 色的当且仅当其每个有限部分都是 k 色的。

证明 显然，我们只需证明一个方向。设 $\mathscr{U}=\langle A,R\rangle$ 是一个图，任意有限子集 $B\subset A$，子模型 $\mathscr{B}=\langle B,R\rangle$ 都是 k 色的，我们证明 $\mathscr{U}$ 也是 k 色的。

令 $\mathscr{L}'=\mathscr{L}\cup\{P_1,\cdots,P_k\}\cup A$，其中 P_1，…，P_k 是一元关系符号，令 $T=\mathrm{Th}\mathscr{U}$，T' 是下列句子的集合：

$a\neq b$：a，$b\in A$，$a\neq b$；

$R(a,b)$：$a,b\in A,\mathscr{U}\models R[a,b]$；

$\neg R(a,b)$：$a,b\in A,\mathscr{U}\models\neg R[a,b]$；

$\forall x(P_1(x)\vee\cdots\cdots\vee P_k(x))$；

$\forall x(P_i(x)\rightarrow\neg P_j(x))$：$1\leqslant i,j\leqslant k,i\neq j$；

$\forall xy(P_i(x)\wedge P_i(y)\rightarrow\neg R(x,y)$：$1\leqslant i\leqslant k$。

再令 $\Sigma=T\cup T'$. 我们证明 Σ 有限可满足。

任取有限子集 $\Sigma'\subset\Sigma$. Σ' 中至多只含有限多个常量 $\{a_1,\cdots,a_n\}\subset A$. 令 $B=\{a_0,\cdots,a_n\}$，则以 B 为论域的子模型 $\mathscr{B}=\langle B,R\rangle$ 是一个 k 色图，即可以把 B 划分为 B_1，…，B_k 个互不相交的子集，B_i 中任意两个元素都不满足关系 R. 用子集 B_1，…，B_k 解释 P_1，…，P_k，把 $\mathscr{B}$ 膨胀到 $\mathscr{L}'$ 的模型 $\mathscr{B}'=\langle B,R,B_1,\cdots,B_k,a_1\cdots a_n\rangle$. $\mathscr{L}'$ 中其余新常量可以任意解释，不难看出

$\mathscr{B}' \models \Sigma'$.

由紧致性定理 Σ 有模型，设为 $\mathscr{C}$.

$\mathscr{C} = \langle C, R, P_1, \cdots, P_k, c_a \rangle_{a \in A}$. 由 $\mathscr{C} \models T$，$\mathscr{C} \models T'$ 知 $\mathscr{C}$ 是一个 k 色图。令 $A_0 = \{c_a: a \in A\}$，则 $A_0 \subset C$，由 A_0 构成 $\mathscr{C}$ 的子模型在 $\mathscr{L}$ 上的归约 $\mathscr{U}_0 = \langle A_0, R \rangle$ 也是 k 色图。令 $f: \mathscr{U} \to \mathscr{U}_0$，对任意 $a \in A$，$f(a) = c_a$，如果 a，$b \in A$，$a \neq b$，则 $a \neq b \in \Sigma$，$\mathscr{C} \models a \neq b$，即 $c_a \neq c_b$. 因此 f 是 A 到 A_0 的一一对应. 对任意 a，$b \in A$. 如 $R(a, b)$ 成立，则 $R(a,b) \in \Sigma$，$\mathscr{C} \models R(a, b)$. 因此 $R(c_a, c_b)$. 如果 $R(a, b)$ 不成立，则 $\neg R(a,b) \in \Sigma$，$\mathscr{C} \models \neg R(a, b)$，有 $\neg R(c_a, c_b)$，这样 f 是 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{U}_0$ 的同构对应。于是 $\mathscr{U} \cong \mathscr{U}_0$，$\mathscr{U}$ 也是 k 色图。 ▌

练习

4.2.1 若 T_1, T_2 是 $\mathscr{L}$ 的两个理论，$T_1 \cup T_2$ 无模型，则存在句子 φ，使 $T_1 \models \varphi$ 且 $T_2 \models \neg \varphi$

4.2.2 若 $\mathscr{U}$ 是 T_1 的模型当且仅当 $\mathscr{U}$ 不是 T_2 的模型，则 T_1，T_2 都可有限公理化。

4.2.3 §3.3 例 5 中一个群如果有任意大有限阶元素，则必有一个有无限阶元的群与它初等等价。

4.2.4 无扭 Abel 群不能有限公理化。

4.2.5 $\mathscr{L}$ 的每个无限模型 $\mathscr{U}$ 都有势为 $\| \mathscr{L} \|$ 的模型 $\mathscr{B}$，使 $\mathscr{U} \equiv \mathscr{B}$，且 $\mathscr{B}$ 中的元素不全是 $\mathscr{L}$ 的常量符号的解释。

4.2.6 证明完全数论的非标准模型 $\mathscr{B}$ 与标准模型 $\mathscr{U}$ 初等等价即 $\mathscr{U} \equiv \mathscr{B}$，且 $|A| = |B| = \omega$. 这是同势的两个无限模型初等等价而又不同构的一个例子。

§4.3 L—S—T 定理

Lōwenheim 早在 1915 年就证明一阶语言的一个句子如果有无限模型则必有可数无限模型，这是模型论最早的定理。1920 年，skolem 把它推广到一个可数句子集。因此，常称这个定理为：L-S 定理。后来 Tarski 把定理的形式加强到初等子模型，成为强升降 L—S—T 定理。

定理 4.3.1 **（降 L—S—T 定理）** 语言 $\mathscr{L}$ 的句子集 T 如果有模型，则 T 有势小于等于 $\|\mathscr{L}\|$ 的模型。

这就是上节推论 4.1.5. 如果句子集 T 可数，即 T 中只有可数多个句子，则 T 中出现的 $\mathscr{L}$ 的非逻辑符号至多可数多个，因此存在可数语言 $\mathscr{L}'\subset\mathscr{L}$，$T$ 是 $\mathscr{L}'$ 的句子集。由上述定理，如果 T 有无限模型，则 T 有势为 $\|\mathscr{L}'\|=\omega$ 的模型，即可数模型. 下面的升 L—S—T 定理就是上节定理 4.2.5.

定理 4.3.2 **（升 L—S—T 定理）** 若句子集 T 有无限模型，则对任意一个基数 $\alpha\geq\|\mathscr{L}\|$，$T$ 有势为 α 的模型。

设 $\mathscr{U}$ 是语言 $\mathscr{L}$ 的模型，$\mathscr{L}_A$ 是 $\mathscr{L}$ 的膨胀语言，$\mathscr{L}_A=\mathscr{L}\cup A$，即 $\mathscr{L}$ 中增加 $\mathscr{U}$ 的论域为其新常量集。$\mathscr{U}_A$ 是 $\mathscr{U}$ 在 $\mathscr{L}_A$ 上的膨胀模型，新常量由论域中元素本身作解释，定义

$\Delta_{\mathscr{U}}=\{\varphi$: φ是 $\mathscr{L}_A$ 的原子句子，或原子句子的否定，$\mathscr{U}_A\models\varphi\}$

$\Gamma_A=\mathrm{Th}\mathscr{U}_A=\{\varphi$: φ是 $\mathscr{L}_A$ 的句子，$\mathscr{U}_A\models\varphi\}$

称 $\Delta_{\mathscr{U}}$是模型 $\mathscr{U}$ 的**图象**，称 Γ_A 是模型 $\mathscr{U}$ 的**初等图象**，易见 $\Delta_{\mathscr{U}}\subset\Gamma_A$.

命题 4.3.3 (i) $\mathscr{U}\tilde{\subset}\mathscr{B}$ 当且仅当存在模型 $\mathscr{B}$ 的 $\mathscr{L}_A$ 膨胀 $\mathscr{B}'$，使 $\mathscr{B}'\models\Delta_{\mathscr{U}}$.

(ii) $\mathscr{U}\tilde{\prec}\mathscr{B}$ 当且仅当存在 $\mathscr{B}$ 的 $\mathscr{L}_A$ 膨胀 $\mathscr{B}'$，使 $\mathscr{B}'\models\Gamma_A$.

证明 (i) ($\Rightarrow$) 假设 $\mathscr{U}\tilde{\subset}\mathscr{B}$，即有 f: $A\to B$，f 是 A 到 B

内的一一映射，f 是 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{B}$ 内的同构嵌入。令 $\mathscr{B}'=(\mathscr{B}, fa)_{a\in A}$，即对 $\mathscr{L}_A$ 中新常量 $a\in A$，以 $\mathscr{B}$ 中元素 fa 作解释，使 $\mathscr{B}$ 膨胀到 $\mathscr{L}_A$ 的模型 $\mathscr{B}'$。我们证明 $\mathscr{B}'\models\Delta_{\mathscr{U}}$.

设 $\varphi(a_1, \cdots, a_n)$ 是 $\mathscr{L}_A$ 的原子句，或原子句的否定式，φ 中出现的新常量全在 $a_1, \cdots, a_n$ 之中。如果 $\varphi(a_1, \cdots, a_n)\in\Delta_{\mathscr{U}}$，即 $\mathscr{U}_A\models\varphi(a_1\cdots a_n)$，因此 $\mathscr{U}\models\varphi[a_1, \cdots, a_n]$，由 f: $\mathscr{U}\widetilde{\subset}\mathscr{B}$，有 $\mathscr{B}\models\varphi[f(a_1), \cdots, f(a_n)]$. 这样 $\mathscr{B}'\models\varphi(a_1\cdots a_n)$，于是有 $\mathscr{B}'\models\Delta_{\mathscr{U}}$.

($\Leftarrow$) 设 $\mathscr{B}$ 在 $\mathscr{L}_A$ 中有膨胀模型 $\mathscr{B}'$，$\mathscr{B}'\models\Delta_{\mathscr{U}}$.
记 $\mathscr{B}'=(\mathscr{B}, b_a)_{a\in A}$，即以 b_a 记新常量 $a\in A$ 在 B 中的解释。令 f: $A\to B$ 是 A 到 B 内的一个对应，对每个 $a\in A$，$f(a)=b_a$. 设 $a_1, a_2\in A$，$a_1\neq a_2$，则 $\mathscr{U}_A\models a_1\neq a_2$，于是 $a_1\neq a_2\in\Delta_{\mathscr{U}}$，$\mathscr{B}'\models a_1\neq a_2$ 便有 $b_{a_1}\neq b_{a_2}$，即 $f(a_1)\neq f(a_2)$. 因此，f 是 A 到 B 内的一一映射。

令 $B_0=\{b_a: a\in A\}$，则 $B_0\subset B$，我们证明 B_0 对 $\mathscr{L}$ 的函数封闭。设 F_j，$j\in J$，是 $\mathscr{L}$ 的 m 元函数符号，$a_1, \cdots, a_n\in A$，$b_{a_1}, \cdots, b_{a_n}\in B_0$. 在模型 $\mathscr{U}$ 中，存在 $a\in A$，使 $F_j(a_1, \cdots, a_n)=a$. 因此 $\mathscr{U}_A\models F_j(a_1\cdots a_n)\equiv a$. 这样 $F_j(a_1, \cdots a_n)\equiv a\in\Delta_{\mathscr{U}}$.
$\mathscr{B}'\models F_j(a_1, \cdots, a_n)\equiv a$，这就是说 B 中 $F_j(b_{a_1}, \cdots, b_{a_n})=b_a\in B_0$. 同样可以证明 $\mathscr{L}$ 中常量在 $\mathscr{B}$ 中的解释都在 B_0 中。

现在，以 B_0 作论域可以得到 $\mathscr{B}$ 的子模型 $\mathscr{B}_0\subset\mathscr{B}$. 设 $\varphi(x_1\cdots x_n)$ 是 $\mathscr{L}$ 的原子公式或原子公式的否定，对任意 $a_1, \cdots, a_n\in A$，$\varphi(a_1, \cdots, a_n)$ 是 $\mathscr{L}_A$ 中原子公式或原子公式的否定，如果 $\mathscr{U}\models\varphi[a_1\cdots a_n]$，则 $\varphi(a_1, \cdots, a_n)\in\Delta_{\mathscr{U}}$. 有 $\mathscr{B}'\models\varphi(a_1, \cdots, a_n)$. 于是 $\mathscr{B}\models\varphi[b_{a_1}, \cdots, b_{a_n}]$，则 $\mathscr{B}_0\models\varphi[f(a_1), \cdots, f(a_n)]$. 这样 f: $\mathscr{U}\to\mathscr{B}$. 是同构对应。此即 $\mathscr{U}\widetilde{\subset}\mathscr{B}$.

(ii) ($\Rightarrow$) 设 $\mathscr{U}\preccurlyeq\mathscr{B}$，即有 f: $\mathscr{U}\to\mathscr{B}$ 是初等嵌入对应。对每个 $a\in A$，令 $f(a)\in B$ 作新常量 a 的解释，得到

$\mathscr{B}'=(\mathscr{B},f(a))_{a\in A}$. 对 $\mathscr{L}_A$ 的任意句子 $\varphi(a_1,\cdots,a_n)$ 其中 $\mathscr{L}_A$ 的新常量全在 $a_1,\cdots,a_n$ 中，如果 $\varphi(a_1,\cdots,a_n)\in\Gamma_A$，即 $\mathscr{U}_A\models\varphi(a_1\cdots a_n)$，则 $\mathscr{U}\models\varphi[a_1,\cdots,a_n]$，有 $\mathscr{B}\models\varphi[f(a_1),\cdots,f(a_n)]$. 这样 $\mathscr{B}'\models\varphi(a_1,\cdots,a_n)$. 因此，$\mathscr{B}'\models\Gamma_A$.

($\Leftarrow$) 假设 $\mathscr{B}$ 有 $\mathscr{L}_A$ 膨胀 $\mathscr{B}'\models\Gamma_A$. 设 $\mathscr{B}'=(\mathscr{B},b_a)_{a\in A}$. 令 $B_0=\{b_a: a\in A\}$，$f: A\to B_0$. 对任意 $a\in A$，$f(a)=b_a$. 由于 $\Delta_{\mathscr{U}}\subset\Gamma_A$，由 (i) 知 $f: \mathscr{U}\cong\mathscr{B}_0$ 是 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{B}$ 内的同构嵌入对应。对 $\mathscr{L}$ 的任意公式 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$，任意 $a_1,\cdots,a_n\in A$，如果 $\mathscr{U}\models\varphi[a_1,\cdots,a_n]$，则 $\varphi(a_1\cdots a_n)\in\Gamma_A$，因此 $\mathscr{B}'\models\varphi(a_1,\cdots,a_n)$. 这样 $\mathscr{B}\models\varphi[b_{a_1},\cdots,b_{a_n}]$，即 $\mathscr{B}\models\varphi[f(a_1),\cdots,f(a_n)]$. 这样 $f: \mathscr{U}\preccurlyeq\mathscr{B}$. ▌

这个命题中的同构嵌入，初等嵌入有时可以简单地看成是子模型和初等子模型。只要用元素 $a\in A$ 去替换 B 中对应的元素 $f(a)=b_a$，即用集合 A 置换 B 的子集 B_0 就可以把 $\mathscr{U}$ 看成是 $\mathscr{B}$ 的子模型或初等子模型。这个作法正好体现了所谓嵌入的意义。

利用模型的图象或初等图象构造扩充模型或初等扩充模型是模型论的一个重要方法，称为图象方法。我们先来介绍几个应用图象方法的例子。

设 T 是 $\mathscr{L}$ 的一个理论，以 $T_\forall$ 记 T 的**全称推论**的集合，即 $T_\forall=\{\varphi\in\Pi_1: T\vdash\varphi\}$.

命题 4.3.4 设 T 是 $\mathscr{L}$ 的一个和谐理论，$\mathscr{U}$ 是 $T_\forall$ 的一个模型，则 $\mathscr{U}$ 可以扩充为 T 的一个模型，即存在模型 $\mathscr{B}\supset\mathscr{U}$，使 $\mathscr{B}\models T$. 即 $T_\forall$ 的模型是 T 的模型的子模型。

证明 设 $\mathscr{U}\models T_\forall$，令 $T'=T\cup\Delta_{\mathscr{U}}$，$\Delta_{\mathscr{U}}$ 是 $\mathscr{U}$ 的图象。我们证明 T' 可满足。设 T' 不可满足，则存在有限子集 $\{\varphi_1(a_1\cdots a_n),\cdots,\varphi_m(a_1\cdots a_n)\}\subset\Delta_{\mathscr{U}}$，使 $T\cup\{\varphi_1,\cdots,\varphi_m\}$ 不和谐，其中 $a_1,\cdots,a_n$ 是 A 中元素，则 $T\vdash\neg(\varphi_1(a_1\cdots a_n)\wedge\cdots\wedge\varphi_m(a_1\cdots a_n))$，由于 $a_1,\cdots,a_n$ 不在 T 中出现，由命题 2.2.2 有

$$T\vdash\forall x_1\cdots x_n\neg\ (\varphi_1\ (x_1\cdots x_n)\ \wedge\cdots\wedge\varphi_m\ (x_1\cdots x_n))$$

又由于 φ_1，…，φ_n 都是 $\Delta_{\mathscr{U}}$ 中句子，因此都无量词，这样，$\forall x_1\cdots x_n\neg(\varphi_1(x_1\cdots x_n)\wedge\cdots\wedge\varphi_m(x_1\cdots x_n))$是一个全称句，即$\Pi_1$句子，因此是 $T_\forall$ 中一个句子。由 $\mathscr{U}\models T_\forall$ 有

$\mathscr{U}\models\forall x_1\cdots x_n$ $(\neg\ (\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_m))$. 对于 a_1，…，$a_n\in A$ 当然有

$\mathscr{U}\models\neg(\varphi_1(a_1\cdots a_n)\wedge\cdots\wedge\varphi_m(a_1\cdots a_n))$. 这样至少有一个 i，$1\leqslant i\leqslant m$，使 $\mathscr{U}\models\neg\varphi_i(a_1\cdots a_n)$. 但 $\varphi_i\in\Delta_{\mathscr{U}}$，必有 $\mathscr{U}\models\varphi_i\ (a_1\cdots a_n)$. 这就得到矛盾。因此 T'是可满足的。

设 $\mathscr{B}'$ 是 $\mathscr{L}_A$ 的模型，$\mathscr{B}'\models T'$. 设 $\mathscr{B}'$ 的 $\mathscr{L}$ 归约为 $\mathscr{B}$，则 $\mathscr{B}\models T$，又 $\mathscr{B}'\models\Delta_{\mathscr{U}}$，由命题 4.3.3 有 $\mathscr{U}\subseteq\mathscr{B}$. ▌

这是利用 $\mathscr{U}$ 的图象构造 $\mathscr{U}$ 的扩充模型的例子。我们再来看利用初等图象构造初等扩充模型的例子。

定理 4.3.5（强升 L—S—T 定理） 设 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{L}$ 的一个无限模型，则 $\mathscr{U}$ 有任意大的初等扩充模型。这里任意大是指比 $\|\mathscr{L}\|$ 大的任意一个基数。

证明 令 Γ_A 是 $\mathscr{U}$ 的初等图象，由升 L—S—T 定理，Γ_A 有任意大模型 $\mathscr{B}'$，$\mathscr{B}'$ 在 $\mathscr{L}$ 中的归约 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{U}$ 的初等扩充模型。▌

设句子集 T 有无限模型 $\mathscr{U}$，$\mathscr{U}$ 的任意大初等扩充模型 $\mathscr{B}$ 仍是 T 的模型。因此上述定理 4.3.5 被称为强升 L—S—T 定理。

命题 4.3.6 设 $\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{L}$ 的非空初等等价的模型类，即对任意 $\mathscr{U}_1$，$\mathscr{U}_2\in\mathscr{F}$，有 $\mathscr{U}_1\equiv\mathscr{U}_2$，则存在 $\mathscr{L}$ 的模型 $\mathscr{B}$，使对每个 $\mathscr{U}\in\mathscr{F}$，有 $\mathscr{U}\preccurlyeq\mathscr{B}$.

证明 对每个 $\mathscr{U}\in\mathscr{F}$，令 Γ_A 是 $\mathscr{U}$ 的初等图象. 令 $\mathscr{L}'=\bigcup_{\mathscr{U}\in\mathscr{F}}\mathscr{L}_A$. 不妨设 $\mathscr{L}'$ 中新常量都互不相同。令 $T=\bigcup_{\mathscr{U}\in\mathscr{F}}\Gamma_A$. 我们证明 T 是 $\mathscr{L}'$的和谐句子集。

任取 $\{\varphi_1,\ \cdots,\ \varphi_n\}\subset T$，不妨设 $\varphi_i\in\Gamma_{A_i}$，$\mathscr{U}_i\in\mathscr{F}$，$\varphi_i=\varphi_i\ (a_{i_1}\cdots a_{i_m})$，即 φ_i 中新常量为 a_{i_1}，$\cdots a_{i_m}\in A_i$. 这样，对每个 $1\leqslant i\leqslant n$，有 $\mathscr{U}_i\models\varphi_i[a_{i_1}\cdots a_{i_m}]$，因此$\mathscr{U}_i\models\exists x_{i_1}\cdots x_{i_m}\varphi_i\ (x_{i_1},\ \cdots x_{i_m})$.

由 $\mathscr{F}$ 是初等类，$\mathscr{U}_i \equiv \mathscr{U}_1$，这样对每个 i，$i=1$，…，n. $\mathscr{U}_1 \models \exists x_{i_1} \cdots x_{i_m} \varphi_i(x_{i_1} \cdots x_{i_m})$. 因此 φ_1，…φ_n 可以在 $\mathscr{U}_1$ 的膨胀模型中成立。由紧致性定理 T 和谐，从而有模型 $\mathscr{B}'$，设 $\mathscr{B}'$ 在 $\mathscr{L}$ 中的归约为 $\mathscr{B}$. 则对任意 $\mathscr{U} \in \mathscr{F}$，$\mathscr{B}' \models \Gamma_A$，由命题 4.3.3 (ii) $\mathscr{U} \preccurlyeq \mathscr{B}$. ▌

引理 4.3.7 设 $\mathscr{U}$、$\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{L}$ 的模型，$\mathscr{U} \prec \mathscr{B}$ 当且仅当 $\mathscr{U} \subset \mathscr{B}$，且对 $\mathscr{L}$ 的任意公式 $\exists x\, \varphi(x, x_1, \cdots, x_n)$，任意 a_1，…，$a_n \in A$，如果 $\mathscr{B} \models \exists x \varphi\,[a_1, \cdots, a_n]$，则存在 $a \in A$，使 $\mathscr{B} \models \varphi\,[a, a_1, \cdots, a_n]$.

证明 (⇒) 设 $\mathscr{U} \prec \mathscr{B}$. 则由定义有 $\mathscr{U} \subset \mathscr{B}$. 对任意公式 $\exists x \varphi\,(x, x_1 \cdots x_n)$，任意 a_1，…，$a_n \in A$，如果 $\mathscr{B} \models \exists x \varphi\,[a_1 \cdots a_n]$，则 $\mathscr{U} \models \exists x \varphi\,[a_1 \cdots a_n]$. 因此存在 $a \in A$，$\mathscr{U} \models \varphi\,[a, a_1 \cdots a_n]$，再由 $\mathscr{U} \prec \mathscr{B}$ 又有 $\mathscr{B} \models \varphi\,[a, a_1, \cdots a_n]$.

(⇐) 对 $\mathscr{L}$ 的公式的复杂性归纳证明对任意公式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$，任意 a_1，…，$a_n \in A$ 有

(1) $\mathscr{U} \models \varphi\,[a_1, \cdots, a_n]$ 当且仅当 $\mathscr{B} \models \varphi\,[a_1, \cdots, a_n]$.

由 $\mathscr{U} \subset \mathscr{B}$，易见对原子公式 (1) 成立。对 $\varphi = \neg\psi$，$\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$ 都不难看出(1)成立。设 $\varphi = \exists x \psi(x, x_1 \cdots x_n)$，如果 $\mathscr{U} \models \varphi[a_1, \cdots, a_n]$，即 $\mathscr{U} \models \exists x \psi[a_1, \cdots, a_n]$，存在 $a \in A$，$\mathscr{U} \models \psi[a, a_1, \cdots, a_n]$，由归纳假设 $\mathscr{B} \models \psi[a, a_1, \cdots, a_n]$，则 $\mathscr{B} \models \exists x \psi[a_1 \cdots a_n]$，反过来，设 $\mathscr{B} \models \varphi[a_1, \cdots, a_n]$，即 $\mathscr{B} \models \exists x \psi[a_1, \cdots, a_n]$，由题设存在 $a \in A$，$\mathscr{B} \models \psi[a, a_1, \cdots, a_n]$，再由归纳假设 $\mathscr{U} \models \psi[a, a_1, \cdots, a_n]$，因此 $\mathscr{U} \models \exists x \psi[a_1 \cdots a_n]$，即 $\mathscr{U} \models \varphi[a_1, \cdots, a_n]$，这样 (1) 对任意公式 φ 成立。 ▌

现在我们给出强降 L—S—T 定理。

定理 4.3.8 **(强降 L—S—T 定理)** 设 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{L}$ 的无限模型，$X \subset A$ 是 A 的任意子集，则对任意基数 β，如 $\|\mathscr{L}\| \leqslant \beta \leqslant |A|$，$|X| \leqslant \beta$，$\mathscr{U}$ 必有势为 β 的初等子模型 $\mathscr{B}$，使

$X \subset B$。

证明 不妨设$|X|=\beta$. 我们构造 A 的子集的一个递增序列

$X=X_0\subset X_1\subset\cdots\subset X_n\subset\cdots$, $n<\omega$.

对任意 $n<\omega$, $X_n\subset A$, $|X_n|=\beta$, 且对任意 a_1, $\cdots$, $a_m\in X_n$, φ $(x, x_1, \cdots, x_m)$ $\in\mathscr{L}$, 如果 $\mathscr{U}\models\exists x\varphi[a_1, \cdots, a_m]$, 则存在 $b\in X_{n+1}$, 使 $\mathscr{U}\models\varphi[b, a_1, \cdots, a_m]$.

只要令 X_{n+1}是 X_n 中增加所有如上所述的 b 即可。由于 $\|\mathscr{L}\|\leqslant\beta$. 因此 X_{n+1}中增加的 b 不超过 β 个, 这样 $|x_{n+1}|=|x_n|\cup\beta=\beta$.

令 $B=\bigcup\limits_{n<\omega}X_n$, 则 $X\subset B\subset A$, $|B|=\beta$. 对 $\mathscr{L}$ 的任意函数符号 F_j, $j\in J$, 设 F_j 是 m 元函数符号, 任取 a_1, $\cdots$, $a_m\in B$, 有$n<\omega$, 使 a_1, $\cdots$, $a_m\in X_n$, 由于

$\mathscr{U}\models\exists x(F_j(x_1,\cdots,x_m)\equiv x)[a_1, \cdots, a_m]$, 存在 $b\in X_{n+1}$, 即 $b\in B$, 使 $\mathscr{U}\models F_j(x_1,\cdots,x_m)\equiv x[a_1, \cdots, a_m, b]$, 即在 $\mathscr{U}$ 中 $F_j(a_1\cdots a_m)=b$. 因此 B 对 $\mathscr{U}$ 的函数封闭。同理可证 B 包含 $\mathscr{L}$ 中常量符号在 $\mathscr{U}$ 中的解释。这样以 B 为论域可以构成 $\mathscr{U}$ 的子模型 $\mathscr{B}$.

对 $\mathscr{L}$ 的任意形如$\exists x\varphi(x, x_1, \cdots, x_n)$ 的公式, 任意 a_1, $\cdots$, $a_n\in B$, 有 $m<\omega$, 使 a_1, $\cdots$, $a_n\in X_m$, 如果 $\mathscr{U}\models\exists x\varphi[a_1\cdots a_n]$, 则存在 $a\in X_{m+1}$, 即 $a\in B$, 使 $\mathscr{U}\models\varphi[a, a_1, \cdots, a_n]$. 由引理 4.3.7, $\mathscr{B}\prec\mathscr{U}$. ▎

至此, 我们已经得到了强弱两种形式的升降 L—S—T 定理。由强升 L—S—T 定理, 我们看到任意一个无限模型 $\mathscr{U}$, 有势比 $\mathscr{U}$ 的基数更大的初等扩充模型 $\mathscr{B}$. 而由 $\mathscr{U}\prec\mathscr{B}$, 有 $\mathscr{U}\equiv\mathscr{B}$; 又由 $\mathscr{U}$, $\mathscr{B}$ 不同势知 $\mathscr{U}$, $\mathscr{B}$ 不同构。这样, 我们看到初等等价而不同构的模型的例子。实际上完全数论的可数非标准型 $\mathscr{B}$ 与标准模型是两个无限模型, 有相同的势, 初等等价, 但并不同构的例子。不过, 这种情况对有限模型并不成立。

设 Σ (x) 是 $\mathscr{L}$ 中只含一个自由变元 x 的公式的集合。称公

式集 $\Sigma(x)$ 在模型 $\mathscr{U}$ 中**可满足**，如果存在元素 $a\in A$，对$\Sigma(x)$中任意公式 $\varphi(x)$，都有 $\mathscr{U}\models\varphi[a]$. 这时我们也称 $\Sigma(x)$ 在 $\mathscr{U}$ 中被元素 a 满足，记为 $\mathscr{U}\models\Sigma[a]$. 称 $\Sigma(x)$ 在 $\mathscr{U}$ 中**有限可满足**，如果 $\Sigma(x)$ 的每个有限子集都在 $\mathscr{U}$ 中可满足。

一个公式集 $\Sigma(x)$ 在模型 $\mathscr{U}$ 中有限可满足，$\Sigma(x)$ 不一定在 $\mathscr{U}$ 中可满足。例如 $\mathscr{L}=\{\leqslant\}$，$\mathscr{U}=\langle N,\leqslant\rangle$，其中 N 是自然数集，$\leqslant$是 N 上普通的小于等于关系。令 $\mathscr{L}'=\mathscr{L}\cup N$，$\mathscr{U}_N$ 是 $\mathscr{U}$ 在 $\mathscr{L}'$ 上的膨胀模型，令 $\Sigma(x)=\{n\leqslant x: n\leqslant\omega\}$，则$\Sigma(x)$是 $\mathscr{L}'$ 的公式集。$\Sigma(x)$ 的任意有限子集中最多只含有限多个自然数。只要取 $m\in N$，m 大于其中最大的一个数，这个有限子集在 $\mathscr{U}_N$ 中就被 m 满足。因此 $\Sigma(x)$ 在 $\mathscr{U}_N$ 中有限可满足。不难看出，$\Sigma(x)$ 在 $\mathscr{U}_N$ 中是不可满足的。

命题 4.3.9 设 $\mathscr{L}$ 的公式集 $\Sigma(x)$ 在 $\mathscr{U}$ 中有限可满足，则存在 $\mathscr{U}$ 的初等扩充模型 $\mathscr{B}$，$\Sigma(x)$ 在 $\mathscr{B}$ 中可满足。

证明 设 Γ_A 是 $\mathscr{U}$ 的初等图象. 令 $\mathscr{L}'=\mathscr{L}_A\cup\{c\}$，其中 c 是不在 $\mathscr{L}_A$ 中出现的新常量. 令 $\Sigma(c)=\{\varphi(c): \varphi(x)\in\Sigma(x)\}$，其中 $\varphi(c)$ 是 $\varphi(x/c)$ 的简写，即用常量 c 代换 $\varphi(x)$ 中所有自由出现的 x 所得的句子. 令 $T=\Gamma_A\cup\Sigma(c)$. 由 $\Sigma(x)$ 在 $\mathscr{U}$ 中有限可满足知 T 有限和谐. 由紧致性定理，T 有模型 $\mathscr{B}'$，$\mathscr{B}'$ 在 $\mathscr{L}$ 中的归约为 $\mathscr{B}$，则由 $\mathscr{B}'\models\Gamma_A$，有 $\mathscr{U}\prec\mathscr{B}$，由 $\mathscr{B}'\models\Sigma(c)$，知存在 $b\in\mathscr{B}$，$\mathscr{B}\models\Sigma[b]$. ▌

如果上述命题中的模型 $\mathscr{U}$ 是有限模型. 则有限可满足和可满足便没有区别了。

命题 4.3.10 设 $\mathscr{U}$ 有限，$\mathscr{L}$ 的公式集 $\Sigma(x)$ 在 $\mathscr{U}$ 中有限可满足，则 $\Sigma(x)$ 在 $\mathscr{U}$ 中可满足。

证明 设 $\mathscr{U}$ 的论域 $A=\{a_1,\cdots,a_n\}$，如果 $\Sigma(x)$ 在 $\mathscr{U}$ 中不可满足，即 $a_1,\cdots,a_n$ 都不满足 $\Sigma(x)$，这样对每个 a_i，$1\leqslant i\leqslant n$，都有 $\varphi_i(x)\in\Sigma(x)$，使 $\mathscr{U}\models\neg\varphi_i[a_i]$. 这时$\{\varphi_1(x),\cdots,\varphi_i(x)\}$是

$\Sigma(x)$ 的一个有限子集，而它不能被 $\mathscr{U}$ 满足，与题设矛盾。 ▌

现在我们可以证明两个有限模型如果初等等价则必是同构模型。

定理 4.3.11 设 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 有限，$\mathscr{U}\equiv\mathscr{B}$，则 $\mathscr{U}\cong\mathscr{B}$.

证明 设 $\mathscr{U}$ 的论域为 $A=\{a_i, \cdots, a_n\}$，A 中有 n 个元素，则 $\mathscr{U}\models\exists x_1\cdots x_n(x_1\not\equiv x_2\wedge\cdots\wedge x_1\not\equiv x_n\wedge\cdots\wedge x_{n-1}\not\equiv x_n)$ 即 $\mathscr{U}$ 中至少有 n 个元素。由 $\mathscr{U}\equiv\mathscr{B}$，知 $\mathscr{B}$ 满足同样的句子，因此 $\mathscr{B}$ 中至少也有 n 个元素。又 $\mathscr{U}\models\exists x_1\cdots x_n\forall y(y\equiv x_1\vee\cdots\vee y\equiv x_n)$，即 $\mathscr{U}$ 中至多只有 n 个元素，同样 $\mathscr{B}$ 中也至多有 n 个元素。合此两者，$\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 有一样多的元素。可以令 $B=\{b_1, \cdots, b_n\}$.

令 $\mathscr{L}'=\mathscr{L}\cup\{c_1, \cdots, c_n\}$. $c_1, \cdots, c_n$ 是不在 $\mathscr{L}$ 中出现的新常量。令 $c_1, \cdots, c_n$ 在 $\mathscr{U}$ 中的解释分别是 $a_1, \cdots, a_n$，把 $\mathscr{U}$ 膨胀到 $\mathscr{U}'=(\mathscr{U}, a_1, \cdots, a_n)$. 下面证明存在 $\mathscr{B}$ 的一个重排 $b'_1, \cdots, b'_n$，以之分别解释 $c_1, \cdots, c_n$ 所得 $\mathscr{B}$ 的膨胀模型 $\mathscr{B}'=(\mathscr{B}, b'_1, \cdots, b'_n)$，有 $(\mathscr{U}, a_1, \cdots, a_n)\equiv(\mathscr{B}b'_1, \cdots, b'_n)$.

令 $\Sigma(x)\equiv\{\varphi(x):\mathscr{U}\models\varphi[a_1]\}$，设
$\{\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)\}\subset\Sigma(x)$，是任一有限子集，则 $\mathscr{U}\models\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_n[a_n]$，有 $\mathscr{U}\models\exists x(\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_n)$，由 $\mathscr{U}\equiv\mathscr{B}$，有 $\mathscr{B}\models\exists x(\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_n)$. 因此 $\Sigma(x)$ 在 $\mathscr{B}$ 中有限可满足. 由于 $\mathscr{B}$ 有限，由命题 4.3.10. $\mathscr{B}$ 中存在一个元素，设为 b'_1，满足 $\Sigma(x)$. 不难看出在 $\mathscr{L}\cup\{c_1\}$ 中，$(\mathscr{U}a_1)\equiv(\mathscr{B}, b'_1)$，同理存在 $b'_2\in\mathscr{B}$，使 $(\mathscr{U}, a_1, a_2)\equiv(\mathscr{B}, b'_1, b'_2)$. 重复 n 次后可得 $b'_1, \cdots, b'_n$，使 $(\mathscr{U}, a_1, \cdots, a_n)\equiv(\mathscr{B}, b'_1, \cdots, b'_n)$.

令 $f: A\to B$，$f(a_i)=b'_i$. 对 $\mathscr{L}$ 的任意公式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$，如果 $\mathscr{U}\models\varphi[a_1, \cdots, a_n]$，则

$(\mathscr{U}, a_1, \cdots, a_n)\models\varphi(c_1, \cdots, c_n)$. 因而有

$(\mathscr{B}, b'_1, \cdots, b'_n)\models\varphi(c_1, \cdots, c_n)$. $\mathscr{B}\models\varphi[b'_1, \cdots, b'_n]$.
因此 f 是 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{B}$ 的一一映射，而且保持所有的关系，函数和常

量，即 f 是 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{B}$ 上的同构映射。 ▌

最后，我们以一个更强形式 L—S—T 定理结束本节.

设 $\Sigma(x)$ 是 $\mathscr{L}$ 的公式集，称模型 $\mathscr{U}$ **省略** $\Sigma(x)$，即对任意 $a\in A$，有 $\varphi(x)\in\Sigma(x)$，使 $\mathscr{U}\models\neg\varphi[a]$. $\mathscr{U}$ 省略 $\Sigma(x)$ 也就是说 $\Sigma(x)$ 在 $\mathscr{U}$ 中不可满足。

定理 4.3.12 设 $\Sigma(x)$ 是 $\mathscr{L}$ 的公式集，$\mathscr{L}$ 的句子集 T 有一个无限模型 $\mathscr{U}$ 省略 $\Sigma(x)$，设 $|A|=\alpha$，则对任意基数 β，$\|\mathscr{L}\|\leqslant\beta\leqslant\alpha$，$T$ 有势 β 的模型省略 $\Sigma(x)$.

我们把这个定理的证明留给读者。

练习

4.3.1 设 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{L}$ 的模型，$\|\mathscr{L}\|\leqslant|A|$，则 $\mathscr{U}$ 有同势的真初等扩充模型。

4.3.2 令 $\mathscr{U}\subset\mathscr{B}$，都是 $\mathscr{L}$ 的模型，设对任意 a_1，…，$a_n\in A$ 和 $b\in B$，存在 $\mathscr{B}$ 的自同构，使 a_1，…，a_n 不变，而 b 对应到 A 中元素，则 $\mathscr{U}\prec\mathscr{B}$。

4.3.3 设 $\mathscr{L}=\{\leqslant\}$，$\langle Q,\leqslant\rangle$，$\langle R,\leqslant\rangle$ 是 $\mathscr{L}$ 的两个模型，其中 Q 是有理数域，R 是实数域，$\leqslant$是普通小于等于，证明 $\langle Q,\leqslant\rangle\prec\langle R,\leqslant\rangle$.

4.3.4 设 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{L}$ 的模型. 如果 $\mathscr{U}\widetilde{\subset}\mathscr{B}$，证明 $\mathscr{U}\preceq\mathscr{B}$ 当且仅当在 $\mathscr{L}_A$ 中 $(\mathscr{B},fa)_{a\in A}\models\Gamma_A$ 当且仅当 $\mathscr{L}_A$ 中 $(\mathscr{U},a)_{a\in A}\equiv(\mathscr{B},fa)_{a\in A}$.

4.3.5 证明定理 4.3.12。

第五章　初等等价模型的代数特征

设 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 是一阶语言 $\mathscr{L}$ 的两个模型。我们假定，如果 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 满足 $\mathscr{L}$ 中相同的句子，就称 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 为初等等价模型，记作 $\mathscr{U}\equiv\mathscr{B}$。但是，用这个定义来判定两个模型初等等价却并不容易。这一章，我们先介绍初等等价模型的纯代数特征，再用这个特征给出判定模型初等等价的一种方法，这是模型论中一个有趣而有用的方法。

§5.1　部分同构

设 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 是一阶语言 $\mathscr{L}$ 的两个模型，p 是 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{B}$ 内的一个映射（部分映射），p 的定义域记为 $\mathrm{dom}(p)$. p 的值域记为 $\mathrm{rg}(p)$，则 $\mathrm{dom}(p)\subseteq A$，$\mathrm{rg}(p)\subseteq B$. 如果 p 是单射且满足下列条件就称 p 是模型 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{B}$ 的一个**部分同构**：

(1) 对 $\mathscr{L}$ 中任一关系符号 R_i，$i\in I$，设 R_i 是 n 元关系符号，则对任意 n 元组 a_1，…，$a_n\in\mathrm{dom}(p)$，$R_i^{\mathscr{U}}(a_1\cdots a_n)$ 成立当且仅当 $R_i^{\mathscr{B}}(p(a_1),\cdots,p(a_n))$ 成立。

(2) 对 $\mathscr{L}$ 中任一函数符号 F_j，$j\in J$，设 F_j 是 m 元函数符号，则对任意 a_1，…，a_m，$a\in\mathrm{dom}$ (p)，$F_j^{\mathscr{U}}(a_1\cdots a_m)=a$ 当且仅当 $F_j^{\mathscr{B}}(p(a_1),\cdots,p(a_m))=p(a)$.

(3) 对 $\mathscr{L}$ 中任一常量符号 c_k，$k\in K$，对任意 $a\in\mathrm{dom}(p)$.

$c_k^{\mathscr{U}}=a$　当且仅当 $c_k^{\mathscr{B}}=p(a)$

部分同构是一个局部化的概念，它只涉及模型 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 中的一部分，即 $\mathrm{dom}(p)$ 与 $\mathrm{rg}(p)$ 这一部分，与其他元素无关。

例 1　设 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{L}$ 的任意两个模型，p 是 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{B}$ 的一个

空映射，即 dom(p)，rg(p)都是空集，则 p 是 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{B}$ 的一个部分同构。

例 2 设 $\mathscr{L}=\{+,0\}$，R，Z 分别是实数集和整数集 $\langle R,+,0\rangle$，$\langle Z,+,0\rangle$ 都是 $\mathscr{L}$ 的模型，其中+，0 是普通加法和零，设 p 是 R 到 Z 的一个部分映射，$\mathrm{dom}(p)=\{2,3\}$，$p(2)=2$，$p(3)=6$，则 p 是 R 到 Z 的一个部分同构。

设 q 也是 R 到 Z 的一个部分映射，$\mathrm{dom}(q)=\{2,3\}$，$q(2)=1$，$q(3)=2$，则 q 不是 R 到 Z 的部分同构。这是因为在 R 中 $2+2\neq 3$，但 Z 中有 $q(2)+q(2)=q(3)$.

命题 5.1.1 设 $\mathscr{L}$ 中只有关系符号，设 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{L}$ 的模型，a_1，…，$a_n\in A$，b_1，…，$b_n\in B$. 设 p 是 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{B}$ 的部分映射，$\mathrm{dom}(p)=\{a_1,\cdots,a_n\}$，$\mathrm{rg}(p)=\{b_1,\cdots,b_n\}$. 且 $p(a_i)=b_i$，$i=1,\cdots,n$. 则 p 是 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{B}$ 的部分同构当且仅当对 $\mathscr{L}$ 的任意原子公式 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 有

（＊）$\mathscr{U}\models\varphi[a_1\cdots a_n]\Leftrightarrow\mathscr{B}\models\varphi[b_1\cdots b_n]$.

证明 假设对 $\mathscr{L}$ 的任意原子公式 $\varphi(x_1\cdots x_n)$ 有（＊）式成立。我们先证明 p 是单射：设 $b_i=b_j$，令 $\varphi(x_1\cdots x_n)=x_i\equiv x_j$ 是 $\mathscr{L}$ 的原子公式，且有 $\mathscr{B}\models\varphi[b_1\cdots b_n]$，由（＊）有 $\mathscr{U}\models\varphi[a_1\cdots a_n]$，即 $a_i=a_j$。再证明 p 保持关系，设 R_i 是 $\mathscr{L}$ 中 r 元关系符号，a_{i_1}，$\cdots a_{i_r}\in\{a_1\cdots a_n\}$，令 $\varphi(x_1\cdots x_n)=R_i(x_{i_1}\cdots x_{i_r})$，$1\leqslant i$，…，$i_r\leqslant n$. 设 $R_i^{\mathscr{U}}(a_{i_1},\cdots a_{i_r})$ 成立则 $\mathscr{U}\models\varphi[a_1\cdots a_n]$，由（＊）有 $\mathscr{B}\models\varphi[b_1\cdots b_n]$，即 $R_i^{\mathscr{B}}(b_{i_1}\cdots b_{i_r})$ 成立，反之亦真。由 $\mathscr{L}$ 中没有函数和常量符号，知 p 已经是 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{B}$ 的部分同构。

对另一个方向，设 p 是 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{B}$ 的部分同构，则由 $\mathscr{L}$ 中没有函数和常量符号容易看出 p 保持 $\mathscr{L}$ 的原子公式，即（＊）成立。因为这时 $\mathscr{L}$ 的原子公式也只有 $x_i\equiv x_j$ 和 R_i $(x_{i_1}\cdots x_{i_r})$ 两种。▌

要注意如果 $\mathscr{L}$ 中有函数，常量符号，即便 p 是部分同构也不见得保持原子公式。例 2 中的 p 就是 $(R,+,0)$ 到 $(Z,+,$

0）的部分同构，令 $\varphi(x_1, x_2) = x_1 + (x_1 + x_1) \equiv x_2$

则 R 中 $\varphi[2, 3]$ 不成立，而 Z 中却有 $\varphi[p(2), p(3)]$ 成立。

还要注意即使 $\mathscr{L}$ 中没有函数和常量符号，部分同构也不能保持有量词的公式，见练习 4.1.1.

现在我们给出两个模型 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 为部分同构和有限同构的概念，并考察他们之间的联系。

设 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 是一阶语言 $\mathscr{L}$ 的两个模型，称 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 是**部分同构模型**，记作 $\mathscr{U} \cong_p \mathscr{B}$。如果存在 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{B}$ 的部分同构集 P，P 不空，且满足下列条件：

(1) 对任意 $p \in P, a \in A$，存在 $q \in P$，使 $q \supset p$ 且 $a \in \mathrm{dom}(q)$；

(2) 对任意 $p \in P, b \in B$，存在 $q \in P$，使 $q \supset p$，且 $b \in \mathrm{rg}(q)$.

设 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 部分同构，P 是满足定义的非空部分同构集，则常写作 P：$\mathscr{U} \cong_p \mathscr{B}$.

设 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 是一阶语言 $\mathscr{L}$ 的两个模型，称 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ **有限同构**，记作 $\mathscr{U} \cong_f \mathscr{B}$，如果存在部分同构集作成的一个序列 $P_n, n < \omega$，对每个 $n < \omega$，P_n 不空，且满足：

(a) 对任意 $p \in P_{n+1}, a \in A$，存在 $q \in P_n$，使 $q \supset p$，且 $a \in \mathrm{dom}(q)$.

(b) 对任意 $p \in P_{n+1}$，$b \in B$，存在 $q \in P_n$，使 $q \supset p$，且 $b \in \mathrm{rg}(q)$.

设 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 有限同构，P_n，$n < \omega$ 是满足定义的部分同构集序列，则常写作 $(P_n)_{n<\omega}$：$\mathscr{U} \cong_f \mathscr{B}$.

命题 5.1.2

(i) 设 $\mathscr{U} \cong \mathscr{B}$，则 $\mathscr{U} \cong_p \mathscr{B}$；

(ii) 设 $\mathscr{U} \cong_p \mathscr{B}$，则 $\mathscr{U} \cong_f \mathscr{B}$；

(iii) 设 $\mathscr{U} \cong_f \mathscr{B}$，$\mathscr{U}$ 是有限模型，则 $\mathscr{U} \cong \mathscr{B}$；

(iv) 设 $\mathscr{U} \cong_p \mathscr{B}$，$\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 是可数模型，则 $\mathscr{U} \cong \mathscr{B}$.

证明 (i) 设 f 是 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{B}$ 的同构映射，f：$\mathscr{U} \cong \mathscr{B}$，令

$P=\{f\}$,容易看出有 P: $\mathscr{U}\cong_p\mathscr{B}$.

(ii) 设 P: $\mathscr{U}\cong_p\mathscr{B}$, 令 $P_n=P$, $n<\omega$, 则显然有 $(P_n)_{n<\omega}$: $\mathscr{U}\cong_f\mathscr{B}$.

(iii) 设 $(P_n)_{n<\omega}$: $\mathscr{U}\cong_f\mathscr{B}$. 由 $\mathscr{U}$ 有限，不妨设 $A=\{a_1, \cdots, a_m\}$，任取 $p\in P_{m+1}$，由 (a) 存在 $q_1\in P_m$，使 $a_m\in\mathrm{dom}(q_1)$. 反复应用 (a)，可以得到 $q\in P_1$，使 $a_1, \cdots, a_m\in\mathrm{dom}(q)$，即得 $\mathrm{dom}(q)=A$. q 是 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{B}$ 的部分同构。要证 q 是 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{B}$ 的同构，只要证明 $\mathrm{rg}\ (q)=B$ 即可。

反证，设 $\mathrm{rg}\ (q)\neq B$. 则存在 $b\in B-\mathrm{rg}\ (q)$. 这样由有限同构定义中的 (b)，存在 $q'\in P_0$，使 $b'\in\mathrm{rg}\ (q')$，$q'\supset q$. 但已有 $\mathrm{dom}\ (q)=A$，因此 q 不可能有这样的扩充 q' 存在。这就得到 $\mathrm{rg}\ (q)=B$. 因此有 q: $\mathscr{U}\cong\mathscr{B}$.

(iv) 设 P: $\mathscr{U}\cong_p\mathscr{B}$，由 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 可数，不妨设 $A=\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$, $B=\{b_0, b_1, b_2, \cdots\}$. 任意 $p\in P$，反复交叉使用部分同构定义中的 (1) 和 (2) 可以得到 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{B}$ 的部分同构的一个递增序列：

$$p=p_1\subset p_2\subset p_3\subset\cdots$$

使 $a_0\in\mathrm{dom}(p_1)$, $a_1\in\mathrm{dom}(p_3)$, $\cdots$

$b_0\in\mathrm{rg}(p_2)$, $b_1\in\mathrm{rg}(p_4)$, $\cdots$

令 $p=\bigcup\limits_{n<\omega}p_n$，容易看出 p 仍是 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{B}$ 的部分同构且 $\mathrm{dom}(p)=A$, $\mathrm{rg}(p)=B$，因此 p 是 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{B}$ 的同构。 ▌

例 3 设 $\mathscr{L}=\{\leqslant\}$，$\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 是 § 3. 3 中第 4 例所述无端点稠密线性序模型，则 $\mathscr{U}\cong_p\mathscr{B}$.

证明 任取 $a_1, \cdots, a_n\in A$, $b_1, \cdots, b_n\in B$，如果这两组元素有完全相同的序关系，即对任意 $1\leqslant i, j\leqslant n$, $a_i=a_j$ 当且仅当 $b_i=b_j$, $a_i\leqslant a_j$ 当且仅当 $b_i=b_j$，则可以定义 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{B}$ 的部分同构 p，使 $\mathrm{dom}(p)=\{a_1,\cdots,a_n\}$, $\mathrm{rg}(p)=\{b_1,\cdots,b_n\}$, $p(a_i)=b_i$, $i=1,\cdots,n$.

令 $P=\{p$: p 是 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{B}$ 的部分同构，$\mathrm{dom}(p)$ 有限$\}$ 则 P:

$\mathscr{U}\cong_p\mathscr{B}$，即 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 部分同构。

首先例 4 中我们已经看到存在 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{B}$ 的部分同构 p，因此 P 不是空集。(事实上空映射也是 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{B}$ 的部分同构)。其次，设 $p\in P$，$\mathrm{dom}(p)=\{a_1, \cdots, a_n\}$，$\mathrm{rg}(p)=\{b_1,\cdots,b_n\}$. 则 a_1，…，a_n 与 b_1，…，b_n 有完全相同的序关系。对任意的 $a\in A$，由 $\mathscr{B}$ 是无端点稠密线性序可知 B 中一定有元素 b，使 a_1，…，a_n，a 与 b_1，…，b_n，b 有完全相同的序关系。这样令 $q=p\cup\{(a, b)\}$，即 q 把 a_i 映到 b_i，$i=1$，…，n，把 a 映到 b，则 q 也是 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{B}$ 的部分同构，因此 $q\in P$，这就证明了（1）成立，对于（2）的证明也是一样，只要用到 $\mathscr{U}$ 是无端点稠密线性序，这样就证明了 P：$\mathscr{U}\cong_p\mathscr{B}$. ▌

如果 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 都是可数无端点稠密线性序，则由命题 5.1.2 (iv) 知 $\mathscr{U}\cong\mathscr{B}$. 这就是定理 3.3.1 的又一个证明。

练习

5.1.1 设 $\mathscr{L}=\{\leqslant\}$，$(R, <)$，$(Z, <)$ 是 $\mathscr{L}$ 的两个偏序模型，其中 R 是实数集，Z 是整数集，令 q 是 R 到 Z 的一个部分映射。$\mathrm{dom}(q)=\{2,3\}$，$q(2)=3$，$q(3)=4$，证明 q 是 $(R, <)$ 到 $(Z, <)$ 的部分同构。

令 $\varphi(x_1,x_2)=\exists y(x_1<y\wedge y<x_2)$，证明

$(R, <)\models\varphi[2, 3]$，$(Z, <)\models\neg\varphi[q(2), q(3)]$.

5.1.2 设 $\mathscr{L}=\varnothing$，$\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{L}$ 的任意两个无限模型，设 a_1，…，$a_n\in A$，b_1，…，$b_n\in B$ 分别是 A，B 的两个 n 元组，令 p 是 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{B}$ 的部分映射，$\mathrm{dom}(p)=\{a_1,\cdots,a_n\}$，$\mathrm{rg}(p)=\{b_1,\cdots,b_n\}$，证明 p 是 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{B}$ 的部分同构；证明 $\mathscr{U}\cong_p\mathscr{B}$.

5.1.3 试给出两个模型 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$，使 $\mathscr{U}\cong_p\mathscr{B}$，但 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 不同构。

5.1.4 试给出两个模型 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$，使 $\mathscr{U}\cong_f\mathscr{B}$，但 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 不

部分同构。

§5.2 Fraissé 定理

上一节中我们看到两个模型之间的部分同构映射保持原子公式，但不保持有量词的公式。本节我们来研究有量词的公式与有限同构的关系。为了分析研究有量词的公式的复杂性，我们归纳定义一个公式量词的深度。量词深度也可以看作一个公式中量词的最大重数。设 φ 是 $\mathscr{L}$ 的一个公式，记 φ 的**量词深度**为 $\mathrm{qr}(\varphi)$，归纳定义如下：

$\mathrm{qr}(\varphi)=0$，如果 φ 是原子公式；

$\mathrm{qr}(\neg\varphi)=\mathrm{qr}(\varphi)$；

$\mathrm{qr}(\varphi\vee\psi)=\max\{\mathrm{qr}(\varphi),\mathrm{qr}(\psi)\}$；

$\mathrm{qr}(\exists x\varphi)=\mathrm{qr}(\varphi)+1$

注意这里我们把基本联结词定义为$\neg$，$\vee$，而把$\wedge$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$都看成是由$\neg$，$\vee$定义的，事实上由于$\neg$，$\vee$是联结词的完全集，任意一个公式都可以化为只含联结词$\neg$，$\vee$的等价公式，而公式的量词深度并不改变。公式中的全称量词看成是由存在量词定义的$\forall x\varphi=\neg\exists x\neg\varphi$. 不难看出 $\mathrm{qr}(\forall x\varphi)=\mathrm{qr}(\varphi)+1$. 容易看出，公式 φ 无量词当且仅当 $\mathrm{qr}(\varphi)=0$.

例 1 设 $\varphi=\neg\exists x(\forall x\, R(xz)\wedge P(y)\wedge\forall zP(z)$.
则 $\mathrm{qr}(\varphi)=2$.

引理 5.2.1 设 $\mathscr{L}$ 只有关系符号，$\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 是一阶语言 $\mathscr{L}$ 的两个模型，$\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 有限同构，$(P_n)_{n<\omega}$: $\mathscr{U}\cong_f\mathscr{B}$. 设 $\varphi(x_1\cdots x_m)$ 是 $\mathscr{L}$ 的一个公式，$\mathrm{qr}(\varphi)\leqslant n$，设 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{B}$ 的部分同构 $p\in P_n$，a_1，…，$a_m\in\mathrm{dom}(p)$，则

（*）$\mathscr{U}\models\varphi\,[a_1, \cdots, a_m]$ 当且仅当

$\mathscr{B}\models\varphi[p(a_1),\cdots,p(a_m)]$.

证明 对 φ 的复杂性和量词深度归纳证明（*）成立。设 φ 是原子公式，由于 $p\in P_n$ 是 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{B}$ 的部分同构，由命题 5.1.1 知（*）成立。设 $\varphi=\neg\psi$，$\varphi=\psi_1\wedge\psi_2$，由归纳假设（*）对 ψ，ψ_1，ψ_2 成立容易证明（*）对 φ 成立。

设 $\varphi(x_1,\cdots,x_m)=\exists x\psi(xx_1\cdots x_m)$. 这时 $\mathrm{qr}(\psi)\leqslant n-1$，归纳假设对任意 $q\in P_{n-1}$，任意 a，a_1，…，$a_m\in\mathrm{dom}(q)$，有

（* *）$\mathscr{U}\models\psi\ [a,\ a_1,\ \cdots,\ a_m]$ 当且仅当

$\mathscr{B}\models\psi\ [q(a),q(a_1),\cdots,q(a_m)]$

现在对 a_1，…，$a_m\in\mathrm{dom}(p)$ 设 $\mathscr{U}\models\varphi\ [a_1,\ \cdots,\ a_m]$ 则存在 $a\in A$，$\mathscr{U}\models\psi\ [a,\ a_1,\ \cdots,\ a_m]$，由有限同构定义的 (1) 知存在 $q\in P_{n-1}$，$q\supset p$，$a\in\mathrm{dom}(q)$，因此 a，a_1，…，$a_m\in\mathrm{dom}(q)$. 由归纳假设有 $\mathscr{B}\models\psi\ [q(a),q(a_1),\cdots,q(a_m)]$. 因此有 $\mathscr{B}\models\varphi\ [q(a_1),\cdots,q(a_m)]$，由 $q\supset p$，a_1，…，$a_m\in\mathrm{dom}(p)$ 知 $q(a_i)=p(a_i)$，$i=1$，…，m，因此 $\mathscr{B}\models\varphi\ [p(a_1),\cdots,p(a_m)]$.

反过来设 $\mathscr{B}\models\varphi\ [p(a_1),\cdots,p(a_m)]$，则存在 $b\in B$，使 $\mathscr{B}\models\psi\ [b,\ p(a_1),\cdots,p(a_m)]$. 由有限同构定义的 (2)，有 $q\in P_{n-1}$，使 $q\supset p$，$b\in\mathrm{rg}(q)$. 即存在 $a\in\mathrm{dom}(q)$ 使 $q(a)=b$. 同样由 $q\supset p$，有 $q(a_i)=p(a_i)$，$i=1$，…，m. 因此有

$\mathscr{B}\models\psi\ [q(a),q(a_1),\cdots,q(a_m)]$. 由归纳假设有，$\mathscr{U}\models\psi\ [a,\ a_1,\ \cdots,\ a_m]$，于是有 $\mathscr{U}\models\varphi\ [a_1,\ \cdots,\ a_m]$.

这样（*）得到证明。 ▌

引理 5.2.2 设 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{L}$ 的两个模型，如果 $\mathscr{U}\cong_f\mathscr{B}$，则 $\mathscr{U}\equiv\mathscr{B}$。

证明 不妨设 $(P_n)_{n<\omega}$: $\mathscr{U}\cong_f\mathscr{B}$. 要证明 $\mathscr{U}\equiv\mathscr{B}$，只要证明对 $\mathscr{L}$ 的任意句子 φ，都有 $\mathscr{U}\models\varphi$ 当且仅当 $\mathscr{B}\models\varphi$.

任取 $\mathscr{L}$ 的句子 φ，φ 的量词深度必有限. 设 $\mathrm{qr}\ (\varphi)\ \leqslant n$，由 P_n 非空，任取 $p\in P_n$，由引理 5.2.1 有（*）成立，由于 φ 中没

有自由变元，（*）变为 $\mathscr{U}\models\varphi$ 当且仅当 $\mathscr{B}\models\varphi$. ▌

以下我们来证明引理 5.2.2 的逆，为此我们必须限制语言 $\mathscr{L}$ 中只有有限多个关系符号，没有函数符号和常量符号。

引理 5.2.3 对任意 m，$n<\omega$，一阶语言中至多只含 m 个自由变元 x_1，…，x_m，量词深度至多为 n 的互不逻辑等价的公式只有有限多个.

证明 对 n 归纳，由于 $\mathscr{L}$ 中只有有限多个关系符号，只含自由变元 x_1，…，x_m 的原子公式至多只有有限多个。

事实上，如果 R 是 $\mathscr{L}$ 中一个一元关系符号，则以 R 和 $x_1,\cdots,x_m$ 组成的原子公式只有 m 个，即 $R(x_1),\cdots,R(x_m)$. 如果 R 是 $\mathscr{L}$ 中一个二元关系符号，则 R 和 x_1，…，x_m 组成的原子公式为 $R(x_i,\ x_j)$，$1\leqslant i,\ j\leqslant m$，共有 m^2 个。一般 k 元关系符号和 $x_1,\cdots,x_m$ 可以组成 m^k 个原子公式。等号可以看成一个二元关系符号，这样有限多个关系符号至多组成有限多个原子公式。

任意一个无量词的公式都可以等价地化为由原子公式和它们的否定式组成的析取标准形，也叫析取范式。而 k 个原子公式只能组成 2^k 个互不等价的析取范式，这样量词深度为 0 的以 $x_1,\cdots,x_m$ 为自由变元的公式只有有限多个。

假设量词深度 $\leqslant n$，自由变元为 $x_1,\cdots,x_m$ 的公式只有有限多个，为 φ_1，…，φ_k，同时假设自由变元为 x_1，…，x_{m+1}，量词深度 $\leqslant n$ 的公式也只有有限多个，不妨设为 ψ_1，…，ψ_l 个。

设 φ 是 $\mathscr{L}$ 的量词深度 $\leqslant n+1$ 的公式，φ 的自由变元为 $x_1,\cdots,x_m$.

如果 φ 的量词深度 $\leqslant n$，则 φ 等价于某个 φ_i，$1\leqslant i\leqslant k$。如果 $\varphi=\forall x\psi$，ψ 的量词深度等于 n，则 ψ 的自由变元为 x，$x_1\cdots x_m$，由于 φ 等价于 $\forall x_{m+1}\psi'$. ψ' 为把 ψ 中自由变元 x 换成 x_{m+1}. 所得公式（必要时把 ψ 中的约束变元作代换使 x_{m+1} 在 ψ 中不出现，再将 x 换成 x_{m+1}），这时 ψ' 等价于某个 ψ_j，$1\leqslant j\leqslant l$，这样以上形式的 φ 只

能等价于

φ_1, …, φ_k, $\forall x\psi_1$, …, $\forall x\psi_l$

中的一个公式，事实上，量词深度$\leqslant n+1$ 的公式只能等价于用命题联结词联结以上这些公式组成的公式。与析取范式作同样的讨论可知，互不等价的这样的公式至多只有有限多个。这就完成了归纳证明。 ▌

引理 5.2.4 设 $\mathscr{L}$ 中只有有限多个关系符号，$\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{L}$ 的两个模型。如果 $\mathscr{U}\equiv\mathscr{B}$，则 $\mathscr{U}\cong_f\mathscr{B}$.

证明 设 $\mathscr{U}\equiv\mathscr{B}$，对任意 $n<\omega$，取 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{B}$ 的部分同构 p，使对某个 $m<\omega$，$\mathrm{dom}p=\{a_1, \cdots, a_m\}\subset A$，对 $\mathscr{L}$ 中量词深度$\leqslant n$ 的任意公式 $\varphi(x_1, \cdots, x_m)$，有

$\mathscr{U}\models\varphi[a_1, \cdots, a_m]$ 当且仅当 $\mathscr{B}\models\varphi[p(a_1)\cdots p(a_m)]$，

令 P_n 为所有这样的部分同构 p 组成的集合. 我们证明

(P_n) $n<\omega$: $\mathscr{U}\cong_f\mathscr{B}$.

首先对每个 $n<\omega$, P_n 非空. 事实上，空映射 $p=\varnothing$，是 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{B}$ 的部分同构，$\mathrm{dom}p=\varnothing\subset A$. 由 $\mathscr{L}$ 中只有有限多个关系符号，知对量词深度$\leqslant n$，自由变元为 $x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}$的公式中互不等价的公式只有有限多个，不妨设为 $\psi_1, \cdots, \psi_k$.

对任意 $1\leqslant i\leqslant k$，令

$$\varphi_i=\begin{cases}\psi_i & \text{如果 } \mathscr{U}\models\psi_i[a_1, \cdots, a_m, a_{m+1}],\\ \neg\psi_i & \text{如果 } \mathscr{U}\models\neg\psi_i[a_1, \cdots, a_m, a_{m+1}].\end{cases}$$

则 $\mathscr{U}\models\exists x(\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_k)[a_1, \cdots, a_m]$，由于

$\mathrm{qr}(\exists x(\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_k))\leqslant n+1$，对任意 $p\in P_{n+1}$，有

$\mathscr{B}\models\exists x(\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_k)[p(a_1),\cdots,P(a_m)]$. 于是，存在 $b\in B$，使 $\mathscr{B}\models\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_k[p(a_1),\cdots,P(a_m), b]$，这就说明 $a_1, \cdots, a_m, a$，与 $p(a_1),\cdots,p(a_m)$，b 分别满足相同的 ψ_i，$i=1, \cdots, k$，从而满足 $\mathscr{L}$ 中量词深度$\leqslant n$ 的相同的公式. 取 $q=p\cup\{a_1, \cdots, a_m, a\}$.

$q(a_i)=p(a_i)$，$i=1$，…，m，$q(a)=b$. 由于 q 保持量词深度$\leqslant n$ 的公式，q 当然保持原子公式，由命题5.1.1 q 是 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{B}$ 的部分同构，这样 $q\in P_n$. 这就证明 P_n 满足有限同构定义的 (a).

同样可以证明 P_n 满足 (b). 这就证明 $\mathscr{U}\cong_f\mathscr{B}$. ▌

由引理 5.2.2 和引理 5.2.4 知对只含有有限多个关系符号的语言 $\mathscr{L}$，有：

定理 5.2.5 (Fraissé 定理) 设 $\mathscr{L}$ 中只含有有限多个关系符号，$\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{L}$ 的两个模型，则 $\mathscr{U}\equiv\mathscr{B}$ 当且仅当 $\mathscr{U}\cong_f\mathscr{B}$.

当语言 $\mathscr{L}$ 限制于有限，并只有关系符号时，Fraissé 定理给出了判断 $\mathscr{L}$ 的两个模型是否初等等价的方法，即要判断 $\mathscr{L}$ 的两个模型 $\mathscr{U}$、$\mathscr{B}$ 是否初等等价，只要判断 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 是否有限同构. 我们知道两个模型初等等价是一阶逻辑模型论所特有的性质，而两个模型有限同构是纯代数的性质，与一阶逻辑无关. 这样 Fraissé 定理给出了两个模型初等等价的代数特征。

例 1 任意两个无端点稠密线性序初等等价，特别 $\langle R, \leqslant\rangle \equiv \langle Q, \leqslant\rangle$.

证明 设 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 都是无端点稠密线性序模型. 由 § 5.1 例 3 知 $\mathscr{U}\cong_p\mathscr{B}$. 由命题 5.1.2 (ii) 知 $\mathscr{U}\cong_f\mathscr{B}$. 再用 Fraissé 定理就得到 $\mathscr{U}\equiv\mathscr{B}$. ▌

例 2 设 $\mathscr{L}=\{S, 0\}$，S 是一元后继函数符号，0 是常量. 设 T 是 $\mathscr{L}$ 的以下几个句子组成的句子集。

$\forall x(\neg x\equiv 0\leftrightarrow\exists y Sy\equiv x)$

$\forall xy(Sx\equiv Sy\rightarrow x\equiv y)$

对任意 $m\geqslant 1$

$\forall x\neg\underbrace{S\cdots S}_{m\text{个}}x\equiv x$

我们常称这个句子集 T 为“**后继函数公理集**”. 容易看出含 0 的自然数集 N 关于后继 S 即 (N, S) 是 T 的模型. 这里 0 解释

为 N 中的第一个数 0，对任意一个数字 $n\in N$，$Sn=n+1$. 在自然数集 N 的后面再接上一个整数集 Z 可以得到 $\mathscr{L}$ 的另一个模型，记作 $N\oplus Z$：

$$\underbrace{0,\ 1,\ 2\cdots,}_{N}\ \underbrace{\cdots-2',\ -1',\ 0',\ 1',\ 2',\ \cdots}_{Z}$$

这里 Z 中数字与 N 中数字是不同的元素. 任意元素 $n'\in Z$，$Sn'=n'+1$. 不难看出 $N\oplus Z\models T$. 事实上，我们可以继续接上一个又一个这样的 Z，组成模型 $N\oplus\underbrace{Z\oplus Z\oplus Z\oplus\cdots\oplus}_{m个}Z$，记作 $N\oplus Z_m$，不同的 Z 中元素互不相同，他们都是 T 的模型.

$$\underbrace{0,\ 1,\ 2\cdots,}_{N}\quad\cdots\quad\underbrace{-2',\ -1',\ 0',\ 1',\ 2',\ \cdots,}_{Z}\quad\cdots,$$

$$\underbrace{\cdots-2^*,\ -1^*,\ 0^*,\ 1^*,\ 2^*,\ \cdots}_{Z}$$

甚至可以接上无限多个 Z，仍得到 T 的模型，记作 $N\oplus Z_\omega$，$N\oplus Z_{\omega_1}$，$N\oplus Z_\infty$ 等等. $N\oplus Z_\omega$ 表示接上可数无限多个 Z，$N\oplus Z_\omega$，表示接了不可数无限多个 Z（ω_1 个 Z），等等，当然还可以不以序的方式来接，我们证明 T 的任意两个模型 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$，都有$\mathscr{U}\equiv\mathscr{B}$.

设 $\mathscr{U}$ 是 T 的一个模型，$a\in A$ 是 $\mathscr{U}$ 的任意一个元素. 记 $S(a)=a'$，$SS(a)=a''$，$\underbrace{S\cdots S}_{m个}(a)=a^{(m)}$，对任意两个元素 a，$b\in A$，定义 a，b 之间的**距离 d**：

$$d(ab)=\begin{cases}m & \text{如果 } a^{(m)}=b,\\ -m & \text{如果 } b^{(m)}=a,\\ \infty & \text{否则.}\end{cases}$$

进一步，对每个 $n\in N$，我们定义 a，b 之间的 **d_n 距离**：

$$d_n(ab)=\begin{cases}m & \text{如果 } a^{(m)}=b,\quad m\leqslant 2^n\\ -m & \text{如果 } b^{(m)}=a,\quad m\leqslant 2^n\\ \infty & \text{否则}\end{cases}$$

这样，两个元素 a，$b\in A$、如果 $d(ab)>2^n$ 则 $d_n(a, b)=\infty$，如果 $d(ab)\leqslant 2^n$，则 $d_n(ab)=d(a, b)$.

现在取 $P_n=\{p$: p 是 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{B}$ 的部分同构，$0^A\in \mathrm{dom}(p)$，对任意 $a, b\in(\mathrm{dom}(p), d_n(a,b)=d_n(p(a), p(b))\}$

即 P_n 是由所有保持 d_n 距离的部分同构组成的集合. 我们来证明 $(P_n)_{n<\omega}$: $\mathscr{U}\cong_f\mathscr{B}$.

首先，取 $p=\{(0^A, 0^B)\}$，即 $\mathrm{dom}(p)=\{0^A\}$. $p(0^A)=0^B$. 则 p 是 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{B}$ 的一个部分同构. 由于 $\mathrm{dom}(p)$ 中只有一点，p 显然保持距离. 这样，对任意 $n<\omega$，有 $p\in P_n$，因而 $P_n\neq\varnothing$

再证明 $(P_n)_{n<\omega}$满足有限同构定义中条件 (a)，设 $p\in P_{n+1}$，$a\in A$，分两种情况讨论.

第一种情况. 如果存在元素 $a_0\in \mathrm{dom}(p)$，有 $|d_n(a\ a_0)|\leqslant 2^n$. 设 $p(a_0)=b_0\in B$. 我们总可以取到一个元素 $b\in B$，使 $d_n(bb_0)=d_n(aa_0)$. 任取一个元素 $a_1\in \mathrm{dom}(p)$，令

$p(a_1)=b_1\in \mathrm{rg}(p)$. 我们证明 a，a_0，a_1 三点与 b，b_0，b_1 三点之间的 d_n 距离完全相同. 事实上，由 $p\in P_{n+1}$，p 保持 d_{n+1}距离，因此有$d_{n+1}(a_0, a_1)=d_{n+1}(b_0, b_1)$. 再由 $d_n(a, a_0)=d_n(b, b_0)$ 有限，容易看出 $d_n(a, a_1)=d_n(b, b_1)$ （见习题 5.2.6）. 令 $q=p\cup\{(a, b)\}$，则 $q\supset p$，q 保持 d_n 距离，因此 $q\in P_n$.

第二种情况，如果 dom (p) 中任意一点到 a 的 d_n 距离都是 ∞. 由于 B 是无限集，rg (p) 只取到 B 中有限多个点，因此必有一点 $b\in B$，使 b 到 rg (p) 中每一点的 d_n 距离都是∞. 这时令 $q_0=p\cup\{a, b\}$，必有 $q_0\supset p$，$q_0\in P_n$. ▌

这样我们证明了 $(P_n)_{n<\omega}$: $\mathscr{U}\cong_f\mathscr{B}$，由 Fraisse′定理得到 $\mathscr{U}\equiv\mathscr{B}$. 这就是说 $\mathscr{L}$ 的句子集 T 的任意模型都互相初等等价. 下一章中，我们会知道这个句子集 T 是 $\mathscr{L}$ 的完全理论。

练习

5.2.1 令 $\mathscr{L}=\varnothing$，T 是无限集理论，即 T 是 $\mathscr{L}$ 中下列句子

组成的句子集：

$T=\{\sigma_n: n\geqslant\alpha,\ \sigma_n$ 表示存在 n 个互不相同的元素$\}$

证明 T 的任意两个模型都初等等价。

5.2.2 两个模型 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 称为 **m 同构**，记作 $\mathscr{U}\cong_m\mathscr{B}$，如果存在 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{B}$ 的部分同构集序列 $P_0, \cdots, P_m$，每个 P_i，$i=1, \cdots, m$ 都不同，且满足下列条件

(1) 对任意 $n+1\leqslant m, p\in P_{n+1}, a\in A$，都存在 $q\in P_n$，使 $q\supset p$，$a\in \mathrm{dom}(q)$

(2) 对任意 $n+1\leqslant m, p\in P_{n+1}, b\in B$，都存在 $q\in P_n$，使 $q\supset p$，$b\in \mathrm{rg}(q)$.

证明 $\mathscr{U}\cong_m\mathscr{B}$ 当且仅当 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 满足量词深度 $\leqslant m$ 的相同的句子。

5.2.3 设 $\mathscr{L}=\{R_1, \cdots, R_s\}$，每个 R_i，$i=1, \cdots, s$，都是一元关系符号. 证明对 $\mathscr{L}$ 的每个模型 $\mathscr{U}$，对任意 $m\geqslant 1$ 都存在一个模型 $\mathscr{B}$，$\mathscr{B}$ 中至多只有 $m\cdot 2^s$ 个元素，并且 $\mathscr{U}\cong_m\mathscr{B}$.（提示：对模型 A 中 R_i 的解释 R_i^A，$i=1, \cdots, s$，令 $A_i=R_i^A$ 或 $A-R_i^A$，这样可把 A 划分为 2^s 个形如 $A_1\cap\cdots\cap A_s$ 的集合，每个这样的集合表示 A 的一个子集，其中的元素满足一些 R_i 而不满足另一些 R_i，对应于这些子集来构造一个模型 $\mathscr{B}$，如果 A 中某个子集的元素个数 $\leqslant m$，$\mathscr{B}$ 中相应子集取同样多的元素；如果 A 中某子集元素个数超过 m，$\mathscr{B}$ 中相应子集就取 m 个元素。）

5.2.4 设 $\mathscr{L}=\{R_1, \cdots, R_s\}$，每个 R_i 都是一元关系符号，φ 是 $\mathscr{L}$ 的一个公式，$\mathrm{qr}(\varphi)\leqslant m$，如果 φ 是可满足的，证明一定有一个模型 $\mathscr{U}\models\varphi$，$\mathscr{U}$ 中至多只有 $m\cdot 2^s$ 个元素。

5.2.5 设 $\mathscr{L}=\{R_i: i<\omega\}$，每个 R_i 都是一元关系符号. 设 $\mathscr{U}$、$\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{L}$ 的两个模型，$A=N$ 是自然数集，$B=N\cup\{\infty\}$，即自然数集中增加一个无穷大元. 对每个 $i<\omega$，$R_i^{\mathscr{U}}=\{n\in N: n\geqslant i\}$. $R_i^{\mathscr{B}}=\{n\in N: n\geqslant i\}\cup\{\infty\}$. 证明 $\mathscr{U}\equiv\mathscr{B}$，但

$\mathscr{U} \not\equiv_f \mathscr{B}$. (提示：对任意有限部分 $\mathscr{L}' \subset \mathscr{L}$，$\mathscr{U}|\mathscr{L}' \cong_f \mathscr{B}|\mathscr{L}'$，因此有$\mathscr{U}|\mathscr{L}' \equiv \mathscr{B}|\mathscr{L}'$，从而 $\mathscr{U} \equiv \mathscr{B}$.)

5.2.6 设 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 是例 2 中"后继函数公理集" T 的模型，设 a，b，$c \in A$，a'，b'，$c' \in B$，对任意$n<\omega$，如果 $d_n(a,b)=d_n(a',b')\neq\infty$，$d_{n+1}(b,c)=d_{n+1}(b',c')$，证明 $d_n(a,c)=d_n(a',c')$（提示：分两种情况讨论，如果 $d_{n+1}(b,c)=d_{n+1}(b',c')=\infty$，证明 $d_n(a,c)=d_n(a',c')=\infty$；如果 $d_{n+1}(b,c)=d_{n+1}(b',c')<\infty$，证明 $d_{n+1}(a,c)=d_{n+1}(a',c')$. 从而有 $d_n(a,c)=d_n(a',c'$.)

§5.3 Ehrenfeucht 博奕

本节介绍 Ehrenfeucht 博奕方法，这种博奕可以把初等等价模型的代数特征直观地描绘出来。这种博奕方法因此有许多有趣的应用。

设 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 是一阶语言 $\mathscr{L}$ 的两个模型，不失一般性，我们假设 $A\cap B=\varnothing$. 对应于模型 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$，有两个选手参加**博奕**，分别叫选手甲和选手乙，简称甲和乙。博奕的规则如下：

每局博奕之前先由选手甲选定一个自然数 $r\geqslant1$，规定好本局博奕每位选手各走 r 步，每步都甲先走，乙后走，然后反复交替每人一步。每一步甲乙都是从 $A\cup B$ 中各选一个元素。如果第 i 步甲选 $a_i\in A$，乙必须选 $b_i\in B$；如果第 i 步甲选 $b_i\in B$，则乙必须选 $a_i\in A$. r 步走完后得到两个序列 a_1，…，$a_r\in A$，b_1，…，$b_r\in B$，这局博奕就结束。博奕的胜负规定为：选手乙赢这一局当且仅当令 $p(a_i)=b_i, i=1$，…，r 时 p 是 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{B}$ 的一个部分同构。

对于两个模型 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$，如果无论如何选手乙都有办法赢得每一局博奕，就称选手乙有**必胜策略**。

引理 5.3.1 $\mathscr{U}\cong_f\mathscr{B}$ 当且仅当对应于 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 的 Ehrenfeuch

博奕中，选手乙有必胜策略。

证明 假设 $(I_n)_{n<\omega}$: $\mathscr{U}\cong_f\mathscr{B}$. 令

$I_n'=\{p:$存在 $q\in I_n, p\subset q\}$. 不难看出仍有

$(I_n')_{n<\omega}$: $\mathscr{U}\cong_f\mathscr{B}$. 如果甲选定一局，步数为 $r\geqslant 1$，则对每个 i 步不论甲选 a_i（或 b_i），都有 $p_i\in I'_{r-i}$，使 $p_i(a_1)=b_1$, …, $p_i(a_i)=b_i$. 由于 $(I'_n)_{n<\omega}$是 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{B}$ 的有限同构，这样的 p_i 总是可以选到的，因此乙有必胜策略.

反之，假设乙有必胜策略，定义一个序列 $(I_n)_{n<\omega}$如下：对任意 $n\in\omega$，令 $p\in I_n$ 当且仅当 p 是 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{B}$ 的部分同构，存在 $j\in N$，a_1，…，$a_j\in A$ 使得

(i) dom (p) $=$ $\{a_1, \cdots, a_j\}$

(ii) 存在 $m\geqslant n$. 在关于模型 $\mathscr{U}$ 和 $\mathscr{B}$ 的某一局博奕中，选手甲选定这一局走 $m+j$ 步。选手乙使用必胜策略，在这一局的开头 j 步中取得元素 a_1，…，$a_j\in A$，$p(a_1)$,…,$p(a_j)\in B$.

由选手乙有必胜策略的定义 $(I_n)_{n<\omega}$必定是 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{B}$ 的有限同构，即 $(I_n)_{n<\omega}$: $\mathscr{U}\cong_f\mathscr{B}$. ▌

定理 5.3.2 (**Ehrenfeucht 定理**) 设 $\mathscr{L}$ 有限且只有关系符号，$\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{L}$ 的任意两个模型，则 $\mathscr{U}\equiv\mathscr{B}$ 当且仅当关于 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 的 Ehrenfeucht 博奕中，选手乙有必胜策略。

证明 由引理 5.3.1 与 Fraisse′定理 5.2.5 立得。▌

由于 Ehrenfeucht 定理，Ehrenfencht 博奕在模型论中有许多应用，特别是在有限模型论和自动机理论中这种博奕有不少有趣的应用。

练习

设 $\mathscr{L}=\{\leqslant\}$，$\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{L}$ 的两个线性序模型，设 $|A|=5$，$|B|=4$，即 A 有 5 个元素，B 有 4 个元素，如果甲选定一局博奕走 3 步，则甲可以使自己在博奕中保持不败。请设计甲不败的一

种走法。设 A 有无限多个元素，甲选定一局博奕走 m 步，问 B 中至少有多少个元素时，乙才能必胜。如果 $|A|=|B|$ 或 A、B 都无限，证明乙有必胜策略。

第六章　一阶逻辑的完全理论

§6.1　理论的完全性和范畴性

一阶语言的句子集也称为理论，$\mathscr{L}$ 的句子集 T 称为**完全理论**，如果 T 和谐并且对 $\mathscr{L}$ 的任意一个句子 φ，有 $T\vdash\varphi$ 或 $T\vdash\neg\varphi$。并非每个和谐句子集都是完全理论。例如 $\mathscr{L}=\{+,\cdot,S,0\}$，Peano 算术公理组成的句子集是和谐的，因为 $\langle N,+,\cdot,S,0\rangle$ 是它的一个标准算术模型. 然而，1931 年 Gödel 证明 Peano 算术公理组成的句子集是不完全的，这就是著名的 Gödel 不完全性定理. 本章我们介绍判定一个理论是完全的理论的几种方法。

命题 6.1.1　(i) 语言 $\mathscr{L}$ 的任何一个极大和谐句子集都是完全理论；

(ii)　设 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{L}$ 的一个模型，$\mathrm{Th}\mathscr{U}=\{\varphi:\mathscr{U}\models\varphi\}$，则 $\mathrm{Th}\mathscr{U}$ 是完全理论。

(i) 和 (ii) 都是显然的，因为 $\mathscr{L}$ 的任意一个句子 φ，φ 或 $\neg\varphi$ 必有一个属于极大和谐句子集. 而 $\mathrm{Th}\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{L}$ 的极大和谐句子集。

定理 6.1.2　$\mathscr{L}$ 的一个和谐理论 T 是完全的当且仅当 T 的任意两个模型 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$，有 $\mathscr{U}\equiv\mathscr{B}$.

证明　(⇒)　设 T 是完全理论，$\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 是 T 的模型，设 φ 是 $\mathscr{L}$ 的任意一个句子，如果 $\mathscr{U}\models\varphi$，则必有 $T\vdash\varphi$（否则有 $T\vdash\neg\varphi$,从而 $\mathscr{U}\models\neg\varphi$）. 而由 $T\vdash\varphi$ 又有 $\mathscr{B}\models\varphi$，反之亦然. 这样 $\mathscr{U}\equiv\mathscr{B}$.

(⇐)　设理论 T 的任意两个模型 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 都有 $\mathscr{U}\equiv\mathscr{B}$。设 φ 是 $\mathscr{L}$ 的任意一个句子，如果 $T\nvdash\varphi$，则 $T\cup\{\neg\varphi\}$ 和谐，有模型

$\mathscr{U}$. $\mathscr{U}\models T$, $\mathscr{U}\models\neg\varphi$. 这样 T 的任意一个模型 $\mathscr{B}$，由 $\mathscr{U}\equiv\mathscr{B}$ 有 $\mathscr{B}\models\neg\varphi$. 于是 $T\models\neg\varphi$，因而 $T\vdash\neg\varphi$，则 T 是完全理论。 ▌

定理 6.1.2 是理论 T 完全的一个充分必要条件。前一章中我们已经看到当 $\mathscr{L}$ 有限并只有关系符号时，Fraissé 定理可以用来判别两个模型是否初等等价. 因此可以用 Fraissé 定理来判别 $\mathscr{L}$ 的理论 T 是否是完全理论、判别理论 T 是完全的另一个有效的判别法称为 **Vanght** 方法. 在介绍 Vanght 方法之前，我们先给出理论的范畴性定义。

和谐理论 T 的任意模型都同构就称 T 是**范畴理论**。如果 T 有势 α 的模型，而 T 的任意两个势为 α 的模型都同构，则称 T 是 **α-范畴理论**。

命题 6.1.3 $\mathscr{L}$ 的句子集 T 是范畴理论当且仅当 T 只有同构的有限模型。

证明 如果 T 只有同构的有限模型，显然 T 是范畴理论. 如果 T 有无限模型，则由 L—S—T 定理 T 有任意大势的无限模型. 不同势的模型必不同构. 因而 T 不是范畴理论。 ▌

命题 6.1.3 说明，一个理论 T 是范畴的充分必要条件是在同构意义下只有一个有限模型。这就使范畴理论这个概念成为很狭隘而没有普遍意义。而相对较弱的 α-范畴理论概念是我们感兴趣的。下面我们来看几个关于范畴和 α-范畴理论的例子。

例 1 $\mathscr{L}=\varnothing$，理论 T 中只有一个句子 S_n $(n\in\omega)$，S_n 意为存在且只存在 n 个不同的元素，则 T 是范畴理论。

例 2 $\mathscr{L}=\varnothing$，T 是 $\mathscr{L}$ 中全体恒真句子组成的理论，即 $T=\{\varphi\colon\vdash\varphi\}$. 则 $\mathscr{L}$ 的任意模型都是 T 的模型，由于 $\mathscr{L}$ 的同势的模型都同构，因此，对任意基数 α，T 都是 α-范畴的。

例 3 $\mathscr{L}=\{P\}$，P 是一元关系，T 是这个语言中全体恒真句子的集合，同样 $\mathscr{L}$ 的任意模型都是 T 的模型。但这个理论对任意基数 α，都不是 α-范畴的。这是因为对任意基数 α，存在模型

$\mathscr{U}_1=\langle A_1, P_1\rangle$，$\mathscr{U}_2=\langle A_2, P_2\rangle$，$|A_1|=|A_2|=\alpha$，$P_1=A_1$，而 $P_2=\varnothing$，易见 $\mathscr{U}_1\not\cong\mathscr{U}_2$.

例 4 $\mathscr{L}=\{P\}$，P 是一元关系. 以 S_n 表示至少有 n 个元素使 $P(x)$ 成立，且至少有 n 个元素使 $P(x)$ 不成立。令 $T=\{S_n: n\in\omega\}$，这时 T 没有有限模型。$\mathscr{U}=\langle A, P\rangle\models T$，当且仅当 P 和 $A\backslash P$ 都有无限多个元素。这样 T 只有一个可数模型，P 和 $A\backslash P$ 都可数，因此 T 是 ω-范畴理论。而对任何不可数基数 α，T 至少有模型 $\mathscr{U}_1=\langle A_1, P_1\rangle$，$\mathscr{U}_2=\langle A_2, P_2\rangle$，其中 $|A_1|=|A_2|=\alpha$，$|P_1|=\omega$，$|P_2|=\alpha$，$|A_1\backslash P_1|=|A_2\backslash P_2|=\alpha$，这样 $\mathscr{U}_1\not\cong\mathscr{U}_2$，$T$ 不是 α-范畴理论。

例 5 $\mathscr{L}=\{c_0, c_1, \cdots\}$，$c_n$，$n\in\omega$，都是常量符号，$T=\{c_m\neq c_n: m\neq n, m, n\in\omega\}$，$T$ 有两个可数模型 $\mathscr{U}_1=\langle A, c_0, c_1, \cdots\rangle$，$\mathscr{U}_2=\langle B, c_0, c_1\cdots\rangle$，其中 $|A|=|B|=\omega$，$A=\{c_0, c_1, \cdots\}$，而 $B=\{a, c_0, c_1, \cdots\}$，对任意 $n\in\omega$，$a\neq c_n$. 不难看出 $\mathscr{U}_1\not\cong\mathscr{U}_2$. 因此 T 不是 ω-范畴理论，但对任意不可数基数 α，T 的任意一个势为 α 的模型中除了常量 c_0，c_1，…外，都还有 α 个其它元素，因此同构，这样对任意不可数基数 α，T 都是 α-范畴理论。

以上几个例子，都是简单显见的例子。它们包括了① 范畴理论；② 对任意基数 α，都是 α-范畴的理论；③ 对任意基数 α，都不是 α-范畴的理论；④ ω-范畴，而对任意不可数基数 α，都不是 α-范畴的理论；⑤ 不是 ω-范畴，而对任意不可数基数 α，都是 α-范畴的理论. 这里我们没有举出对某两个不可数基数 α_1，α_2，是 α_1-范畴，而不是 α_2-范畴的理论的例子来. 近世代数中有许多类似于例 1—例 5 的理论的例子，而没有最后的那种情况的例. 1954 年 **Vanght 猜想**任何一个理论 T，如果对某个不可数基数 α 是 α-范畴的，则对任意不可数基数 α 都是 α-范畴的，这个著名的猜想吸引许多学者的注意。经过十多年努力，最后由 Morley 于 1965 年证

明对可数语言 $\mathscr{L}$，Vanght 猜想是成立的，这就是模型论著名的 **Morley 定理**. 后来 1971 年，Shelah 把这一结果推广到不可数语言，他证明理论 T 若对某个基数 $\alpha>\|\mathscr{L}\|$，是 α_0-范畴的，则 T 对任意基数 $\alpha>\|\mathscr{L}\|$，都是 α-范畴的。

范畴性可以作为完全理论的一个判定。

定理 6.1.4 （**Vaught 判别法**） 设理论 T 没有有限模型，对某个无限基数 $\alpha\geqslant\|\mathscr{L}\|$，$T$ 是 α-范畴的，则 T 是完全理论。

证明 设 T 不是完全理论，则存在 $\mathscr{L}$ 的句子 φ，使 $T\nvdash\varphi$，且 $T\nvdash\neg\varphi$。这样 $T\cup\{\varphi\}$，$T\cup\{\neg\varphi\}$ 都和谐，因而有模型 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}\models T$，而 $\mathscr{U}\models\varphi$，$\mathscr{B}\models\neg\varphi$。由于 T 没有有限模型，$\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 都是无限的。由 L—S—T 定理不妨设 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 的势都是 $\|\mathscr{L}\|$，再由强升 L—S—T定理存在 $\mathscr{L}$ 的势为 α 的两个模型 $\mathscr{C}_1$，$\mathscr{C}_2$，使 $\mathscr{U}\prec\mathscr{C}_1$，$\mathscr{B}\prec\mathscr{C}_2$，这时 $\mathscr{C}_1\models T$，$\mathscr{C}_2\models T$，又有 $\mathscr{C}_1\models\varphi$，$\mathscr{C}_2\models\neg\varphi$，因此 $\mathscr{C}_1\not\cong\mathscr{C}_2$，这与 T 是 α-范畴理论矛盾。 ▌

用 Vaught 判别法可以立即判定无端点稠密线性序理论是完全理论：

定理 6.1.5 设 $\mathscr{L}=\{\leqslant\}$，$T$ 是无端点稠密线性序理论，则 T 是完全理论。

证明 容易看出 T 没有有限模型。又由 §3.3 命题 3.3.1 知 T 的任意可数模型都同构，即 T 是 ω-范畴理论，由 Vaught 判别法知 T 是完全理论。 ▌

用 Vaught 判别法还可以判别一些常见的理论的完全性。设 $\mathscr{L}=\{+,\ \cdot,\ 0,\ 1\}$，设 T 是特征为零的域公理以及下列句子组成的理论：

P_n：$x_n\neq0\to\exists y\,(x_n\cdot y^n+x_{n-1}y^{n+1}+\cdots+x_1y_1+x_0\equiv0)$. 其中 y^n 是 $\underbrace{y\cdot y\cdots y}_{n}$ 的简写，$n<\omega$，

P_n 意为系数在域模型中的 n 次方程在此模型中有解. 这个理

论 T 被称为特征零的代数闭域理论. T 没有有限模型，由全体代数数组成的特征为零的代数闭域及其添加一个超越元组成的扩域的代数闭包都是 T 的可数模型，但它们不同构，因此 T 不是 ω-范畴理论，然而 1910 年 Steinity 证明对任意不可数基数 α，势为 α 的特征为零的代数闭域都是同构的，因此 T 是 α-范畴理论，这样由 Vaught 判别法可知 T 是完备理论。

设 $\mathscr{L}=\{+,\cdot,-,0,1\}$，§3.3 例 8 中给出布尔代数理论，布尔代数模型中满足如下公式的元素称为一个原子：

$\varphi(x)=x\neq 0\wedge\forall y(y\neq 0\wedge x\cdot y\equiv y\rightarrow y\equiv x)$

每个有限布尔代数模型中都有原子，可以证明同势的有限布尔代数模型都同构。每个元素都不是原子的布尔代数模型称为非原子布尔代数。布尔代数理论可以证明任意两个可数非原子布尔代数都同构。这样非原子布尔代数理论是完全理论。

在代数理论中不难证明，对任意无限基数 α，每个非零元都同阶的无限 Abel 群理论是 α-范畴的，因此是完全理论。对每个不可数无限基数 α，$\alpha>\omega$，无限可除无扭 Abel 群理论是 α 范畴的，因而也是完全的。

练习

6.1.1 证明 T 是完全理论当且仅当 T 的任意两个模型可以初等嵌入 T 的第三个模型。

6.1.2 证明具有有限模型的完全理论是范畴理论。

6.1.3 证明对不可数基数 ω_1，无端点稠密线性序理论不是 ω_1-范畴的.〔提示. 实数集 R，实数集 R 后缀一个有理数集 Q 都是无端点稠密线性序，但不同构〕。

6.1.4 设 $\mathscr{L}=\{S,0\}$，其中 S 是一元函数符号，T 是如下句子集构成的理论：

$Sx\neq 0$

$Sx \equiv Sy \to x \equiv y$

$x \not\equiv 0 \to \exists y(x \equiv Sy)$

$x \not\equiv Sx, x \not\equiv SSx, x \not\equiv SSSx, \cdots$

证明 T 的模型都无限，T 不是 ω-范畴的理论；对任意不可数基数 α，T 是 α-范畴理论。

6.1.5 证明有最大元的稠密线性序理论是完全理论，同样有最小元的稠密线性序理论也是完全理论。

§6.2 模型完全理论

模型完全理论是 A · Robinson 引进模型论的一个重要概念。称理论 T 是**模型完全理论**，如果 T 的任意两个模型 $\mathscr{U}$、$\mathscr{B}$，只要 $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{B}$，就有 $\mathscr{U} \prec \mathscr{B}$.

一般地，一个理论 T 的模型 $\mathscr{U}$、$\mathscr{B}$，$\mathscr{U} \subseteq \mathscr{B}$ 不一定有 $\mathscr{U} \prec \mathscr{B}$，例如 T 是有最小元的线性序理论，$\langle N, \leqslant \rangle$ 与 $\langle N \cup \{-1\}, \leqslant \rangle$ 都是 T 的模型，而且有 $\langle N, \leqslant \rangle \subseteq \langle N \cup \{-1\}, \leqslant \rangle$，但对 $\mathscr{L}$ 的公式 $\varphi(x) = \forall y(x \leqslant y)$，$0 \in N$，$\langle N, \leqslant \rangle \models \varphi[0]$ 而 $\langle N \cup \{-1\}, \leqslant \rangle \not\models \varphi[0]$. 因此 $\langle N, \leqslant \rangle$ 不是 $\langle N \cup \{-\}, \leqslant \rangle$ 的初等子模型。这就是说有最小元的线性序理论不是模型完全理论。

当已知某个理论 T 是模型完全理论时，我们就有一种新的方法来判别 T 是否完全理论，这就是 **Robinson 判别法**：

定理 6.2.1 设 T 是模型完全理论，

(i) 如果 T 的任意两个模型能同构嵌入 T 的第三个模型，则 T 是完全理论；

(ii) 如果 T 有一个模型能同构嵌入 T 的任意模型，则 T 是完全理论。

证明 由于T是模型完全理论，T的模型$\mathscr{U}$同构嵌入T的模型$\mathscr{B}$必是初等嵌入，如果T满足(i)的条件，设$\mathscr{U}$，$\mathscr{B}\models T$，则存在$\mathscr{C}\models T$，$\mathscr{U}\prec\mathscr{C}$，$\mathscr{B}\prec\mathscr{C}$，这样$\mathscr{U}\equiv\mathscr{C}$，$\mathscr{B}\equiv\mathscr{C}$，因此$\mathscr{U}\equiv\mathscr{B}$，则$T$是完全理论，如果$T$满足(ii)的条件，则存在$\mathscr{U}\models T$，对任意$\mathscr{B}\models T$，$\mathscr{U}\prec\mathscr{B}$，因此$\mathscr{U}\equiv\mathscr{B}$，这样$T$的任意模型都与$\mathscr{U}$初等等价，因此$T$是完全理论。 ▌

运用 Robinson 判别法的前提是判定T是模型完全理论。下面几个定理给出了理论T是模型完全理论的几个充分必要条件。

定理6.2.2 设T是语言$\mathscr{L}$的理论，以下四个条件互相等价：

(i) T是模型完全理论；

(ii) 设$\mathscr{U}$是T的任意一个模型，则$T\cup\Delta_{\mathscr{U}}$是$\mathscr{L}_A$的完全理论；

(iii) 设$\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$是T的任意两个模型，如果$\mathscr{U}\subseteq\mathscr{B}$，则$\mathscr{L}_A$中每个存在句$\varphi$如在$\mathscr{B}_A$中真就在$\mathscr{U}_A$中也真；

(iv) 对$\mathscr{L}$中每个存在公式φ，都有一个全称公式ψ，使$T\vdash\varphi\leftrightarrow\psi$.

证明 (i) ⇒ (ii). 设T模型完全，$\mathscr{U}\models T$，证明$T\cup\Delta_{\mathscr{U}}$是$\mathscr{L}_A$中完全理论。设$\mathscr{B}'$是$\mathscr{L}_A$中模型，$\mathscr{B}'\models T\cup\Delta_{\mathscr{U}}$，由命题4.3.3，$\mathscr{B}'$的$\mathscr{L}$归约$\mathscr{B}$有$f$: $\mathscr{U}\widetilde{\subset}\mathscr{B}$. 因此有$f$: $\mathscr{U}\prec\mathscr{B}$，这样$(\mathscr{U}, a)_{a\in A}\equiv(\mathscr{B}, fa)_{a\in A}$. 但是$(\mathscr{B}, fa)_{a\in A}$即$\mathscr{B}'$，于是有$\mathscr{B}'\equiv\mathscr{U}_A$. 由此知$T\cup\Delta_{\mathscr{U}}$的任意模型都是初等等价的，则$T\cup\Delta_{\mathscr{U}}$是$\mathscr{L}_A$的完全理论。

(ii) ⇒ (iii). 设$\mathscr{U}$，$\mathscr{B}\models T$，$\mathscr{U}\subseteq\mathscr{B}$，$\varphi$是$\mathscr{L}_A$的存在句，$\mathscr{B}_A\models\varphi$，由(ii) $T\cup\Delta_{\mathscr{U}}$是$\mathscr{L}_A$完全理论，而由$\mathscr{U}\subseteq\mathscr{B}$有$\mathscr{B}_A\models T\cup\Delta_{\mathscr{U}}$. 因而$T\cup\Delta_{\mathscr{U}}\models\varphi$. 但是显然有：$\mathscr{U}_A\models T\cup\Delta_{\mathscr{U}}$，这样有$\mathscr{U}_A\models\varphi$.

(iii) ⇒ (iv). 设$\varphi(y_1, \cdots, y_n)$是$\mathscr{L}$的任意一个存在公式，不妨假设$T\cup\{\varphi\}$和谐. 否则令$\psi=\forall x(x\neq x)$就有$T\vdash\varphi\leftrightarrow\psi$. 令

$\mathscr{L}'=\mathscr{L}\cup\{c_1, \cdots, c_n\}$，$c_1, \cdots, c_n$ 是新常量符号，$\varphi(c_1, \cdots, c_n)$ 表示用 $c_1, \cdots, c_n$ 同时分别代换 $\varphi(y_1, \cdots, y_n)$ 中自由出现的 $y_1, \cdots, y_n$ 所得句子。令

$\Gamma=\{r(c_1, \cdots, c_n): r$ 是 $\mathscr{L}'$的全称句子，$T\models\varphi(c_1, \cdots, c_n)\to r\}$. 由 $T\cup\{\varphi(c_1, \cdots, c_n)\}$ 和谐知 $T\cup\Gamma$ 和谐. 以下证明 $T\cup\Gamma\models\varphi$.

任取 $\mathscr{L}'$ 中 $T\cup\Gamma$ 的模型 $\mathscr{U}'=(\mathscr{U}, b_1, \cdots, b_n)$，其中：$b_1, \cdots, b_n$ 分别是 $c_1, \cdots, c_n$ 的解释，先证明语言 $\mathscr{L}_A\cup\{c_1\cdots c_n\}$ 中的句子集 $T\cup\Delta_{\mathscr{U}'}\cup\{\varphi(c_1,\cdots,c_n)\}$和谐。

任取 $\Delta_{\mathscr{U}'}$ 的一个有限子集 $\theta_1(a_1,\cdots,a_m,c_1,\cdots,c_n),\cdots\theta_l(a_1,\cdots,a_m,c_1,\cdots,c_n)$，其中新常量都在 $a_1, \cdots, a_m$，及 $c_1, \cdots, c_n$ 之中. 令 $\theta(a_1,\cdots,a_m,c_1,\cdots,c_n)=\theta_1\wedge\cdots\wedge\theta_l(a_1,\cdots,a_m,c_1,\cdots,c_n)$，我们有 $\mathscr{U}\models\theta\,[a_1, \cdots, a_m, b_1, \cdots, b_n]$，因此
$\mathscr{U}\models\exists x_1\cdots x_m\theta(x_1, \cdots, x_n, z_1, \cdots, z_n)\,[b_1, \cdots, b_m]$. 在 $\mathscr{L}'$ 中有$(\mathscr{U},b_1,\cdots,b_n)\models\neg\forall x_1\cdots x_m\neg\theta(x_1,\cdots,x_m,c_1,\cdots,c_n)$. 由
$(\mathscr{U},b_1,\cdots,b_n)\models T$，及 θ 是无量词式，有

$T\not\models\varphi(c_1,\cdots,c_n)\to\forall x_1\cdots x_m\neg\theta(x_1,\cdots,x_m,c_1,\cdots,c_n)$. 否则 $\forall x_1\cdots x_m\neg\theta\in\Gamma$，有$(\mathscr{U},b_1,\cdots,b_n)\models\forall x_1\cdots x_m\neg\theta$ 矛盾！

从而 $T\cup\{\varphi\}\not\models\forall x_1\cdots x_m\neg\theta(c_1, \cdots, c_n)$. 这样
$T\cup\{\varphi(c_1, \cdots, c_n)\}\cup\{\neg\forall x_1\cdots x_m\neg\theta(x_1\cdots x_m, c_1\cdots c_n)\}$ 和谐，而这就是$T\cup\{\varphi(c_1, \cdots, c_n)\}\cup\{\exists x_1\cdots x_m\theta(x_1\cdots x_m, c_1\cdots c_n)\}$和谐. 因此 $T\cup\{\varphi(c_1,\cdots,c_n)\}\cup\{\theta(a_1,\cdots,a_m,c_1,\cdots,c_n)\}$和谐。这说明 $T\cup\Delta_{\mathscr{U}'}\cup\{\varphi(c_1\cdots c_n)\}$的任意有限子集和谐，由紧致性定理 $T\cup\Delta_{\mathscr{U}'}\cup\{\varphi(c_1\cdots c_n)\}$有模型 $\mathscr{B}'$，设 $\mathscr{B}'$ 在 $\mathscr{L}'$ 中的归约为 $\mathscr{B}$. 则 $\mathscr{B}\models T,\mathscr{U}'\subseteq\mathscr{B}$，$\mathscr{B}\models\varphi\,(c_1\cdots c_n)$. 由 (iii) $\mathscr{U}'\models\varphi(c_1\cdots c_n)$.

以上证明得到 $T\cup\Gamma\models\varphi\,(c_1\cdots c_n)$，从而 $T\cup\Gamma\vdash\varphi\,(c_1\cdots c_n)$。这样存在 Γ 的有限句子 $r_1, \cdots, r_s\in\Gamma$，$T\vdash r_1\wedge\cdots\wedge r_s\to\varphi$，再由 Γ 的定义，有 $T\vdash r_1\wedge\cdots\wedge r_s\leftrightarrow\varphi$，而 $r_1, \cdots, r_s$，φ 中常量 $c_1, \cdots,$

c_n 不在 T 中出现，因此有 $T \models \forall x_1 \cdots x_n (r_1 \wedge \cdots \wedge r_s \leftrightarrow \varphi(x_1 \cdots x_n))$，当然就有 $T \vdash r_1 \wedge \cdots \wedge r_s \leftrightarrow \varphi(x_1 \cdots x_n)$. 这里的 $r_1 \wedge \cdots \wedge r_s(x_1 \cdots x_n)$ 是 $\mathscr{L}$ 的全称公式.

(iv) $\Rightarrow$ (i). 先由 (iv) 证明对 $\mathscr{L}$ 的任意公式 φ 都有全称公式 ψ，使 $T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$，任意公式 φ 都可以等价地化为前束标准形 Σ_n 公式。我们对 n 归纳，Σ_1 式即存在公式，由 (iv) 知结论成立，如果 φ 等价于 Σ_2 公式，即 φ 等价于 $\exists x_1 \cdots x_{m_1} \forall y_1 \cdots y_{m_2} \psi$，其中 ψ 无量词，这时 $\neg\varphi$ 等价于 $\forall x_1 \cdots x_{m_1} \exists y_1 \cdots y_{m_2} \neg\psi$. 由于 $\exists y_1 \cdots y_{m_2} \neg\psi$ 是 Σ_1 公式，可以有全称公式 ψ_1 使 $T \vdash \exists y_1 \cdots y_{m_2} \neg\psi \leftrightarrow \psi_1$. 因此 $T \vdash \neg\varphi \leftrightarrow \forall x_1 \cdots x_{m_1} \psi_1$. 因而 $T \vdash \varphi \leftrightarrow \exists x_1 \cdots x_{m_1} \neg\psi_1$，而 $\exists x_1 \cdots x_{m_2} \neg\psi_1$ 是 Σ_1 公式，又有全称公式 ψ_2，使 $T \vdash \exists x_1 \cdots x_{m_1} \neg\psi_1 \leftrightarrow \psi_2$，这样有 $T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi_2$.

现在假设对任意 $k < n$，Σ_k 公式结论成立，若 φ 等价于 Σ_n 公式，$n \geqslant 2$. 则 φ 可以等价地化为 $\exists x_1 \cdots x_{m_1} \forall y_1 \cdots y_{m_2} \psi$，$\psi \in \Sigma_{n-2}$. 由归纳假设有全称公式 ψ_1，使 $T \vdash \psi \leftrightarrow \psi_1$. 这样
$T \vdash \varphi \leftrightarrow \exists x_1 \cdots x_{m_1} \forall y_1 \cdots y_{m_2} \psi_1$，而后一公式是 Σ_2 公式，由上面的证明有全称公式 ψ_2，使 $T \models \varphi \leftrightarrow \psi_2$.

现在可以证明 (i) 成立. 设 $\mathscr{U}, \mathscr{B} \models T$，$\mathscr{U} \subset \mathscr{B}$. 设 $\varphi(x_1 \cdots x_n)$ 是 $\mathscr{L}$ 的任一公式，$a_1, \cdots, a_n \in A$，$\mathscr{B} \models \varphi[a_1, \cdots, a_n]$，这时有全称公式 $\psi(x_1, \cdots, x_n)$，$T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$，因此有 $\mathscr{B} \models \psi[a_1, \cdots, a_n]$。而对于全称公式，不难看出在子模型下保持，因此有 $\mathscr{U} \models \psi[a_1, \cdots, a_n]$，从而又有 $\mathscr{U} \models \varphi[a_1, \cdots, a_n]$，这样就得到 $\mathscr{U} \prec \mathscr{B}$. ▎

这个定理中的 (ii) 和 (iii) 是模型完全理论的语义特征；(iv) 是模型完全理论的语法特征。由证明 (iv) $\Rightarrow$ (i) 中看出 (iv) 可以加强为 $\mathscr{L}$ 中的任意公式存在 $\mathscr{L}$ 的全称公式 ψ，使 $T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$. 用 (ii) 和 (iii) 来判定一个理论是否模型完全要考察 T 的每个模型。下面的推论把这一要求限制到只要考察 T 的势为 α 的模型。

推论 6.2.3 若 T 没有有限模型，$\alpha \geqslant \|\mathscr{L}\|$，则下列条件是 T 模型完全的充分必要条件：

(ii_α) T 的每个势为 α 的模型 $\mathscr{U}$，$T \cup \Delta_{\mathscr{U}}$ 是 $\mathscr{L}_A$ 的完全理论；

(iii_α) $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 是 T 的势为 α 的任意两个模型，如果 $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{B}$，则 $\mathscr{L}_A$ 中每个存在句 φ 如在 $\mathscr{B}_A$ 中真就在 $\mathscr{U}_A$ 中也真。

证明 仿定理6.2.2.证明(i)⇒(ii_α)⇒(iii_α)⇒(iv)⇒(i)。其中 (i) ⇒ (ii_α)，(iv) ⇒ (i) 同定理 6.2.2. (ii_α) ⇒ (iii_α) 与 (ii) ⇒ (iii) 类似. 而 (iii_α) ⇒ (iv) 只要在定理证明的 (iii) ⇒ (iv) 中的模型 ($\mathscr{U}$, b_1, $\cdots$, b_n) 及 $\mathscr{B}'$ 都取势为 α 的模型即可，这一点由 T 只有无限模型以及 L—S—T 定理可以做到。 ▌

我们称理论 T 的模型 $\mathscr{U}$ 是**存在闭模型**，如果对 T 的任意模型 $\mathscr{B}$，只要 $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{B}$，$\mathscr{L}_A$ 中任意存在句如在 $\mathscr{B}_A$ 中真就在 $\mathscr{U}_A$ 中真。这样由定理 6.2.2，T 是模型完全理论当且仅当 T 的每个模型都是存在闭模型。而由推论可知，如果 T 没有有限模型，由 T 的每个势为 α 的模型都是存在闭的可知 T 的每个模型都是存在闭模型，存在闭模型是模型论中一个重要概念，由一阶逻辑我们知道每个无量词的公式都可以等价地化为析取范式，即形如 $\psi_1 \vee \cdots \vee \psi_n$ 的公式，其中每个 ψ_i，$1 \leqslant i \leqslant n$，都是原子公式或原子公式的否定的合取式，而 $\exists x(\psi_1 \vee \cdots \vee \psi_n)$ 与 $\exists x\psi_1 \vee \cdots \vee \exists x\psi_n$ 等价。如果称原子公式和原子公式的否定式的合取式为**基本公式**，我们有如下推论。

推论 6.2.4 $\mathscr{U}$ 是 T 的存在闭模型当且仅当 $\mathscr{U} \models T$，且对任意模型 $\mathscr{B} \models T$，$\mathscr{U} \subset \mathscr{B}$，$\mathscr{L}_A$ 的任意基本公式 $\psi(x)$，如果 $\mathscr{B}_A \models \exists x\psi(x)$，则 $\mathscr{U}_A \models \exists x\psi(x)$. ▌

应用这个推论不难看出无端点稠密线性序理论 T 的每个模型都是存在闭模型，因此 T 是模型完全理论。而 $\langle Q, \leqslant \rangle$ 是 T 的每个模型的子模型，这样由 Robinson 判别法定理 6.2.1 (ii) 又一次证明无端点稠密线性序理论是完全理论。

我们称模型的递增序列为**模型链**：

$\mathscr{U}_0\subseteq\mathscr{U}_1\subseteq\mathscr{U}_2\subseteq\cdots\mathscr{U}_\beta\subseteq\cdots$，$\beta<\alpha$.

我们定义模型 $\mathscr{U}=\bigcup\limits_{\beta<\alpha}\mathscr{U}_\beta$ 为**模型链的并**：$\mathscr{U}$ 的论域 $A=\bigcup\limits_{\beta<\alpha}A_\beta$，其中 A_β 是 $\mathscr{U}_\beta$ 的论域。对 $\mathscr{L}$ 中每个关系 R_i，$R_i^{\mathscr{U}}=\bigcup\limits_{\beta<\alpha}R_i^{\mathscr{U}_\beta}$. 即对任意 a_1，…，$a_n\in A$，有 $\beta<\alpha$，a_1，…，$a_n\in A_\beta$，$R_i^{\mathscr{U}}(a_1,\cdots,a_n)$ 成立当且仅当 $R_i^{\mathscr{U}_\beta}(a_1,\cdots a_\beta)$ 成立，$\mathscr{L}$ 中每个函数符号 F_j，$F_j^{\mathscr{U}}=\bigcup\limits_{\beta<\alpha}F_j^{\mathscr{U}_\beta}$，即对任意 a_1，…，$a_m\in A$，有 $\beta<\alpha$，a_1，…，$a_m\in A_\beta$，$F_j^{\mathscr{U}}(a_1,\cdots,a_m)=F_j^{\mathscr{U}_\beta}(a_1,\cdots,a_m)\in A_\beta$，对 $\mathscr{L}$ 的每个常量 c_k，$k\in K$，$c_k^{\mathscr{U}}=c_k^{\mathscr{U}_\beta}$. $\beta<\alpha$，由于 $\mathscr{U}_\beta$，$\beta<\alpha$，是模型的递增链，c_k 在每个 $\mathscr{U}_\beta$ 中的解释都相同。由此定义，对每个 $\beta<\alpha$，有 $\mathscr{U}_\beta\subseteq\mathscr{U}$.

不难看出模型链的并是以 $\bigcup\limits_{\beta<\alpha}A_\beta$ 为论域，而以每个 $\mathscr{U}_\beta$ 为其子模型的唯一的模型。如果对每个 $\beta<\alpha$，$\mathscr{U}_\beta$ 都是理论 T 的模型，则称模型链 $\mathscr{U}_\beta$，$\beta<\alpha$，是 **T 的模型链**，一般说来，T 的模型链的并，不一定还是 T 的模型。

例如 T 是有最小元的线性序，下面是 T 的模型链：

$\langle N,\leqslant\rangle\subseteq\langle N\cup\{-1\},\leqslant\rangle\subseteq\langle N\cup\{-1,-2\}\leqslant\rangle\subseteq\cdots$

而这个链的并是模型 $\langle Z,\leqslant\rangle$，$Z$ 中无极小元，因此 $\langle Z,\leqslant\rangle$ 不是 T 的模型。

定理 6.2.5 （**Lindström 定理**） 设 $\mathscr{L}$ 是可数语言，T 是 $\mathscr{L}$ 的和谐理论，T 满足下列三个条件：

(i) T 的每个模型都无限；

(ii) T 的模型链的并仍是 T 的模型；

(iii) 对某个无限基数 α，T 是 α-范畴理论，则 T 是模型完全理论。

证明 我们证明 T 满足推论 6.2.3 中条件 (iii$_a$)，即 T 的每个势为 α 的模型都是存在闭模型，由条件 (iii)，我们实际上只要证明理论 T 有一个势为 α 的存在闭模型。

设 $\mathscr{U}\models T$，称模型 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{U}$ 的 T 扩充模型，简称 **T 扩充**，如果 $\mathscr{B}\models T$，且 $\mathscr{U}\subseteq\mathscr{B}$，任取 T 的一个势为 α 的模型 $\mathscr{U}$，枚举 $\mathscr{L}_A$ 中全部存在句 φ_β，$\beta<\alpha$，构造 T 的模型链：

$$\mathscr{U}=\mathscr{U}_0\subseteq\mathscr{U}_1\subseteq\mathscr{U}_2\subseteq\cdots\subseteq\mathscr{U}_\beta\subseteq\cdots,\ \beta<\alpha,$$

使对每个 $\beta<\alpha$，如果 φ_β 在 $\mathscr{U}_{\beta A}$ 的某个 T 扩充模型中真则 φ_β 在 $\mathscr{U}_{\beta+1A}$ 中真。对每个后继序数 $r=\beta+1$，如果 φ_β 在 $\mathscr{U}_{\beta A}$ 的每个 T 扩充中都不真，则令 $\mathscr{U}_{\beta+1}=\mathscr{U}_\beta$，如果 φ_β 在 $\mathscr{U}_{\beta A}$ 的某个 T 扩充中真，则 $\{\varphi_\beta\}\cup\Delta_{\mathscr{U}_{\beta A}}\cup T$ 和谐。由于 T 的每个模型都无限，由 L—S—T 定理，可以取到 $\mathscr{L}_A$ 的势为 α 的模型 $\mathscr{B}'$，使 $\mathscr{B}'\models\{\varphi_a\}\cup\Delta_{\mathscr{U}_{\beta A}}\cup T$，设 $\mathscr{B}'$ 的 $\mathscr{L}$ 归约为 $\mathscr{B}$，取 $\mathscr{U}_{\beta+1}=\mathscr{B}$，则 $\mathscr{U}_{\beta+1}\models T$，$\mathscr{U}_\beta\subseteq\mathscr{U}_{\beta+1}$ 且 $\mathscr{U}_{\beta A}\models\varphi_\beta$，对每个极限序数 $r<\alpha$，取 $\mathscr{U}_r=\bigcup\limits_{\beta<r}\mathscr{U}_\beta$.

令 $\mathscr{U}^1=\bigcup\limits_{\beta<\alpha}\mathscr{U}_\beta$ 是模型链的并，由 (ii) $\mathscr{U}^1\models T$，且 $|A^1|=\bigcup\limits_{\beta<\alpha}|A_\beta|=\alpha$，对 $\mathscr{L}_A$ 中每个存在句 φ，如果 φ 在 $\mathscr{U}^1_A$ 的某个 T 扩充中真，则 $\{\varphi\}\cup\Delta_{\mathscr{U}^1}\cup T$ 和谐。这时必有某 $\beta<\alpha$，使 $\varphi_\beta=\varphi$，这样有 $\{\varphi\}\cup\Delta_{\mathscr{U}_\beta}\cup T$ 和谐，因此 φ 在 $\mathscr{U}_{\beta+1A}$ 中真。由于 $\mathscr{U}_{\beta+1}\subseteq\mathscr{U}^1$，因此 φ 在 $\mathscr{U}^1_A$ 中也真。

现在我们有 $\mathscr{U}\subseteq\mathscr{U}^1$，$\mathscr{L}_A$ 中任意存在句 φ 在 $\mathscr{U}^1_A$ 的某 T 扩充中真就在 $\mathscr{U}^1_A$ 中真，重复这一过程我们得到 T 的模型链：

$$\mathscr{U}\subseteq\mathscr{U}^1\subseteq\mathscr{U}^2\subseteq\cdots\subseteq\mathscr{U}^n\subseteq\cdots,\ n<\omega$$

使对任意 $n<\omega$，$\mathscr{L}_{A^n}$ 的任一存在句如在 $\mathscr{U}^{n+1}_{A^n}$ 的某个 T 扩充中真就在 $\mathscr{U}^{n+1}_{A^n}$ 中真，且 $|A^n|=\alpha$.

令 $\mathscr{U}^\omega=\bigcup\limits_{n<\omega}\mathscr{U}^n$，由 (ii) $\mathscr{U}^\omega\models T$，这时 $\mathscr{L}^\omega_A$ 中每个存在句如在 $\mathscr{U}^\omega_{A^\omega}$ 的某 T 扩充中真就在 $\mathscr{U}^\omega_{A^\omega}$ 中真。再由 $|A^\omega|=\alpha$，$\mathscr{U}^\omega$ 是 T 的势为 α 的存在闭模型。至此，我们证明了 T 满足推论 6.2.3 (iii_α)，因此 T 是模型完全理论。 ▌

用 Lindström 定理也可以证明无端点稠密线性序理论是模型

完全的。Lindström 定理有如下推论。

推论 6.2.6 设 $\mathscr{L}$ 是可数语言，T 是 $\mathscr{L}$ 的理论，α 是无限基数，设 T 满足以下条件：

(i) T 没有有限模型；

(ii) T 的模型链的并仍是 T 的模型；

(iii) 对 T 的任意一个可数模型 $\mathscr{U}$，$T\cup\Delta_{\mathscr{U}}$ 是 α 范畴理论。

则 T 是模型完全理论。

证明 设 $\mathscr{U}$ 是 T 的任意可数模型。由 (i) $T\cup\Delta_{\mathscr{U}}$ 也没有有限模型。易见 $T\cup\Delta_{\mathscr{U}}$ 的模型链的并仍是 $T\cup\Delta_{\mathscr{U}}$ 的模型。而由 (iii) $T\cup\Delta_{\mathscr{U}}$ 是 α-范畴理论，这样由 Lindström 定理，$T\cup\Delta_{\mathscr{U}}$ 是模型完全理论。

设 $\mathscr{U}$ 是 T 的势为 α 的模型，由强降 L—S—T 定理，$\mathscr{U}$ 有可数初等子模型 $\mathscr{U}'$。这样 $\mathscr{U}'\models T$，$\mathscr{U}_{A'}\models T\cup\Delta_{\mathscr{U}'}$，由已证知 $\mathscr{U}_{A'}$ 是 T 的存在闭模型，当然 $\mathscr{U}$ 也就是 T 的存在闭模型。由推论 6.2.3 (iii_a) 知 T 是模型完全理论。▌

例 代数闭域理论 T 是模型完全理论但不是完全理论。

证明 由代数理论可知 T 没有有限模型，且 T 的模型链的并仍是 T 的模型。对 T 的任意可数模型 $\mathscr{U}$，$\mathscr{U}$ 是特征 p 或是特征零的代数闭域模型。这样 $T\cup\Delta_{\mathscr{U}}$ 是特征 p 或特征零的代数闭域理论，因此是 ω_1 范畴的，由推论 6.2.6，T 是模型完全理论，由 T 有特征 p 和特征零的模型知 T 不是完全理论。▌

模型完全理论在数学中有许多应用。例如应用特征为零的代数闭域理论是模型完全理论可以证明 **Hilbert 零点定理**，即复数域上多项式环 $\boldsymbol{C}[x_1, \cdots, x_n]$ 中多项式 $P_1, \cdots, P_k$ 在复数域 $\boldsymbol{C}$ 中无公共解当且仅当 $P_1, \cdots, P_k$ 互素当且仅当 $P_1, \cdots, P_k$ 在 $\boldsymbol{C}$ 的任意扩域中都无公共解。令 $\mathscr{L}=\{+, \cdot, <, 0, 1\}$，$T$ 是 $\mathscr{L}$ 的实闭有序域理论，则 T 是模型完全理论。由此可以证明 **Hilbert 第 17 问题成立**，即实数域 R 上的多项式构成的有理分式域中每个正

定多项式 P，必等于若干多项式的平方和。这一问题的模型论证明大大简化了 Artin 最初给出的代数证明。

证明 请参阅王世强著《模型论基础》。

练习

6.2.1 设 $\mathscr{L}=\varnothing$，$T=\{\lambda_m;\ m<\omega\}$，对任意 $m<\omega$，句子 λ_m 表示"存在 m 个互不相同的元素。证明 T 是模型完全理论，T 也是完全理论。

6.2.2 设 $\mathscr{L}=\{\leqslant,\ 0\}$，$T$ 是稠密线性序理论，φ 表示 0 是极小元，证明 $T\cup\{\varphi\}$ 是 $\mathscr{L}$ 的模型完全理论。

6.2.3 设 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{L}$ 的模型，$\mathscr{U}\subseteq\mathscr{B}$，对 $\mathscr{L}$ 的任意 Π_n 公式 $\varphi(x_1,\ \cdots x_m)$，若 $a_1,\ \cdots,\ a_m\in A$，$\mathscr{U}\models\varphi[a_1\cdots a_m]$，则 $\mathscr{B}\models\varphi[a_1,\ \cdots,\ a_m]$，称 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{B}$ 的 Π_n 初等子模型，或 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{U}$ 的 Π_n 扩充，记作 $\mathscr{U}\prec_n\mathscr{B}$，证明下列命题：

(i) 对任意 $m<n$，$\mathscr{U}\prec_n\mathscr{B}\Rightarrow\mathscr{U}\prec_m\mathscr{B}$；

(ii) $\mathscr{U}\prec\mathscr{B}$ 当且仅当对任意 $n<\omega$，$\mathscr{U}\prec_n\mathscr{B}$.

6.2.4 设 $\Gamma_A^n=\{\varphi:\ \varphi$ 是 $\mathscr{L}_A$ 中 Π_n 句子，$\mathscr{U}_A\models\varphi\}$，称 Γ_A^n 为模型 $\mathscr{U}$ 的 Π_n 图象. 证明 $\mathscr{U}\prec_n\mathscr{B}$ 当且仅当 $\mathscr{B}$ 有膨胀模型 $\mathscr{B}'\models\Gamma_A^n$

6.2.5 设 $\mathscr{U}\subseteq\mathscr{B}$，对任意 $n<\omega$，以下三个条件互相等价：

(i) $\mathscr{U}\prec_{n+1}\mathscr{B}$；

(ii) 存在模型 $\mathscr{C}$，使 $\mathscr{U}\prec\mathscr{C}$，$\mathscr{B}\prec_n\mathscr{C}$；

(iii) 存在 $\mathscr{C}$，使 $\mathscr{U}\prec_{n+1}\mathscr{C}$，$\mathscr{B}\prec_n\mathscr{C}$.

6.2.6 理论 T 是模型完全理论当且仅当对任意模型 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$，如果 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}\models T$，$\mathscr{U}\subseteq\mathscr{B}$，都有 $\mathscr{U}\prec_1\mathscr{B}$.

6.2.7 设 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}\models T$，$\mathscr{U}\prec_1\mathscr{B}$，$\mathscr{B}$ 是 T 的存在闭模型，则 $\mathscr{U}$ 也是 T 的存在闭模型。

6.2.8 证明推论 6.2.4.

第七章　模型的初等链

§7.1　初等链定理

称模型链 $\mathscr{U}_\beta$，$\beta<\alpha$，是**初等链**，如果

$\mathscr{U}_0\prec\mathscr{U}_1\prec\cdots<\mathscr{U}_\beta\prec\cdots$，$\beta<\alpha$，

即对任意 $\beta<\gamma<\alpha$，$\mathscr{U}_\beta\prec\mathscr{U}_\gamma$。上节已知模型链的并是链中每个模型的扩充，理论 T 的模型链的并不一定仍是 T 的模型。而对于初等链，我们有肯定的结果。

定理 7.1.1　(**初等链定理**)　设 $\mathscr{U}_\beta$，$\beta<\alpha$，是模型的初等链，$\mathscr{U}=\bigcup\limits_{\beta<\alpha}\mathscr{U}_\beta$，则对任意 $\beta<\alpha$，$\mathscr{U}_\beta\prec\mathscr{U}$.

证明　对 $\mathscr{L}$ 的公式复杂度归约证明：对任意公式 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$，任意 $\beta<\alpha$，a_1，$\cdots$，$a_n\in A_\beta$，

(1) $\mathscr{U}_\beta\models\varphi\ [a_1,\ \cdots,\ a_n]$ 当且仅当 $\mathscr{U}\models\varphi\ [a_1,\ \cdots,\ a_n]$，

由于 $\mathscr{U}_\beta\subseteq\mathscr{U}$，对原子公式 $\varphi\ (x_1,\ \cdots,\ x_n)$，(1) 式显然成立，对 $\varphi=\neg\psi$，$\varphi=\psi_1\wedge\psi_2$，容易证明 (1) 也成立。

设 $\varphi=\exists x\psi(x,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)$，如 $\mathscr{U}_\beta\models\varphi\ [a_1,\ \cdots,\ a_n]$，则存在 $a\in A_\beta$，$\mathscr{U}_\beta\models\psi[a,\ a_1,\ \cdots,\ a_n]$，由归纳假设

$\mathscr{U}\models\psi[a,\ a_1,\ \cdots,\ a_n]$，从而 $\mathscr{U}\models\varphi[a_1,\ \cdots,\ a_n]$。反之，设 $\mathscr{U}\models\varphi[a_1,\ \cdots,\ a_n]$，则存在 $a\in A$，使 $\mathscr{U}\models\psi[a,\ a_1,\ \cdots,\ a_n]$，由归纳假设存在 $\eta<\alpha$，不妨设 $\beta<\eta<\alpha$，使 $a\in A_\eta$，

$\mathscr{U}_\eta\models\psi[a,\ a_1,\ \cdots,\ a_n]$. 这样 $\mathscr{U}_\eta\models\varphi[a_1,\ \cdots,\ a_n]$，由 $\mathscr{U}_\beta\prec\mathscr{U}_\eta$，又有 $\mathscr{U}_\beta\models[a_1,\ \cdots,\ a_n]$，因此 (1) 成立。 ▌

由初等链定理立即得到如下推论：

推论 7.1.2　设 T 是 $\mathscr{L}$ 的模型完全理论，$\mathscr{U}_\beta$，$\beta<\alpha$，是 T

的模型链，$\mathscr{U}=\bigcup_{\beta<\alpha}\mathscr{U}_\beta$，则 $\mathscr{U}\models T$.

证明 由于 T 是模型完全理论，$\mathscr{U}_\beta$，$\beta<\alpha$，是初等链，由初等链定理，$\mathscr{U}_0\prec\mathscr{U}$，再由 $\mathscr{U}_0\models T$，得 $\mathscr{U}\models T$. ▍

初等链定理有许多重要应用。本节介绍几个保持性定理，作为初等定理应用的例子。我们称理论 T 在**子模型下保持**，如果 T 的模型的子模型仍是 T 的模型；称 T 在**链并下保持**，如果 T 的模型链的并仍是 T 的模型；称 T 在**同态模型下保持**，如果 T 的模型的同态模型仍是 T 的模型。以上这些都是理论 T 的语义特性，保持性定理将给出与之等价的语法特征。我们先给出下面这个一般性的引理。

引理 7.1.3 令 T 是 $\mathscr{L}$ 中的和谐理论，Δ 是 $\mathscr{L}$ 的对有限析取封闭的句子集。则下列两条件等价：

(i) T 有公理集 Γ，$\Gamma\subseteq\Delta$；

(ii) 如果 $\mathscr{U}\models T$，对每个句子 $\delta\in\Delta$，δ 在 $\mathscr{U}$ 中真就在模型 $\mathscr{B}$ 中亦真，则 $\mathscr{B}\models T$。

证明 (i)$\Rightarrow$(ii). $\mathscr{U}\models T$，则 $\mathscr{U}\models\Gamma$，由 (ii) 的条件有 $\mathscr{B}\models\Gamma$，由 Γ 是 T 的公理集，$\mathscr{B}\models T$。

(ii) $\Rightarrow$ (i). 令 $\Gamma=\{\varphi\colon \varphi\in\Delta,\ T\models\varphi\}$。我们证明 Γ 是 T 的公理集。设 $\mathscr{B}\models\Gamma$. 令句子集 $\Sigma=\{\neg\delta\colon \mathscr{B}\models\neg\delta,\ \delta\in\Delta\}$。下证 $\Sigma\cup T$ 和谐。由题设 T 是和谐的，如果 $\Sigma\cup T$ 不和谐，则必存在 $\neg\delta_1,\cdots,\neg\delta_n\in\Sigma$，使 $T\models\neg(\neg\delta_1\wedge\cdots\wedge\neg\delta_n)$，因此 $T\models\delta_1\vee\cdots\vee\delta_n$. 由于 δ_1，$\cdots$，$\delta_n\in\Delta$，Δ 在析取下封闭，$\delta_1\vee\cdots\vee\delta_n\in\Delta$。这样 $\delta_1\vee\cdots\vee\delta_n\in\Gamma$，$\mathscr{B}\models\delta_1\vee\cdots\vee\delta_n$. 必有 $1\leqslant i\leqslant n$，使 $\mathscr{B}\models\delta_i$，这与 $\neg\delta_i\in\Sigma$，$\mathscr{B}\models\neg\delta_i$ 矛盾。因此 $\Sigma\cup T$ 和谐，有模型 $\mathscr{U}$。这样对任意句子 $\delta\in\Delta$，如果 $\mathscr{U}\models\delta$，必有 $\mathscr{B}\models\delta$.（否则 $\mathscr{B}\models\neg\delta$，$\neg\delta\in\Sigma$，从而 $\mathscr{U}\models\neg\delta$ 矛盾）. 由 (ii) 有 $\mathscr{B}\models T$. ▍

先不用初等链定理证明一个简单的**保持性定理**。

定理 7.1.4 理论 T 在子模型下保持当且仅当 T 有**全称公**

理集（即Π_1公理集）。

证明 如果T有全称公理集，容易验证T在子模型下保持。现在设T在子模型下保持。应用引理7.1.3以Π_1句子集为引理中的Δ。考虑$\mathscr{U}\models T$，每个全称句子如在$\mathscr{U}$中真则在$\mathscr{B}$中真，这样每个存在句子如在$\mathscr{B}$中真就在$\mathscr{U}$中真。令$\mathscr{L}_B=\mathscr{L}\cup B$，$T'=T\cup\Delta_{\mathscr{B}}$，$\Delta_{\mathscr{B}}$是$\mathscr{B}$的图象。我们证明$T'$和谐。任取$\Delta_{\mathscr{B}}$的有限子集：

$$\{\theta_1(b_1,\cdots,b_n),\cdots,\theta_m(b_1,\cdots,b_n)\}$$

则由$\mathscr{B}\models\theta_1\wedge\cdots\wedge\theta_m\,[b_1,\cdots,b_n]$有$\mathscr{B}\models\exists x_1\cdots x_n\,(\theta_1\wedge\cdots\wedge\theta_m)$. 这样$\mathscr{U}\models\exists x_1\cdots x_n\,(\theta_1\wedge\cdots\wedge\theta_m)$. 因此$T'$有限可满，由紧致性定理$T'$有模型$\mathscr{C}'=\mathscr{C}_B$，$\mathscr{C}'\models\Delta_{\mathscr{B}}$，$\mathscr{C}'\models T$，这样$\mathscr{B}\widetilde{\subseteq}\mathscr{C}$，$\mathscr{C}\models T$，由于$T$在子模型下保持，$\mathscr{B}\models T$. 这样引理7.1.3条件（ii）满足。因而由条件（i），T有Π_1公理集。 ▌

下面一个保持性定理要用到初等链定理。

定理7.1.5 理论T在链并下保持当且仅当T有**全称存在公理集**（Π_2公理集），

证明（$\Leftarrow$） 设T有Π_2公理集，$\mathscr{U}_\beta$，$\beta<\alpha$，是T的模型链，$\mathscr{U}=\bigcup\limits_{\beta<\alpha}\mathscr{U}_\beta$，考虑一个$\Pi_2$句子

$\varphi=\forall x_1\cdots x_m\exists y_1\cdots y_n\psi(x_1\cdots x_m y_1\cdots y_n)$，其中$\psi$无量词，如果对任意$\beta<\alpha$，$\mathscr{U}_\beta\models\varphi$，令$a_1,\cdots,a_m\in A$，则有某$\beta<\alpha$，$a_1,\cdots,a_m\in A_\beta$，这样存在$b_1,\cdots b_n\in A_\beta$，使

$$\mathscr{U}_\beta\models\psi\,[a_1,\cdots,a_m,b_1,\cdots,b_n]$$

由$\mathscr{U}_\beta\subseteq\mathscr{U}$，有

$$\mathscr{U}\models\psi\,[a_1,\cdots,a_m,b_1,\cdots,b_n]$$

因此$\mathscr{U}\models\varphi$，即任一$\Pi_2$句子在链并下保持。这样$\mathscr{U}$满足$T$的公理集，因此有$\mathscr{U}\models T$。

（$\Rightarrow$） 设T在链并下保持。Δ是等价于Π_2句子的全体句子

集，则 Δ 在析取下封闭。设 $\mathscr{U}$ 都是 T 的模型，每个 Π_2 句子如在 $\mathscr{U}$ 中真就在 $\mathscr{B}$ 中真. 则每个 Σ_2 句子如在 $\mathscr{B}$ 中真就在 $\mathscr{U}$ 中真，先证明：

(1) 存在模型 $\mathscr{U}'$，$\mathscr{B}'$，使 $\mathscr{B}\subseteq\mathscr{U}'$，$\mathscr{U}'\subseteq\mathscr{B}'$，$\mathscr{B}\prec\mathscr{B}'$ 且 $\mathscr{U}\equiv\mathscr{U}'$.

令 $\mathscr{L}_B=\mathscr{L}\cup B$，$T_1=\mathrm{Th}\mathscr{U}$，$T_2=\{\varphi:\varphi$ 是 $\mathscr{L}_B$ 中全称句子，$\mathscr{B}_B\models\varphi\}$，我们证明 $T_1\cup T_2$ 和谐。任取 T_2 的有限子集 $\{\varphi_1(b_1,\ \cdots,\ b_n),\ \cdots,\ \varphi_m(b_1,\ \cdots,\ b_n)\}$，$\varphi_1$，$\cdots$，$\varphi_m$ 是在 $\mathscr{B}_B$ 中真的全称句子，则 $\mathscr{B}\models\exists y_1\cdots y_n(\varphi_1(y_1,\cdots,y_n)\wedge\cdots\wedge\varphi_m(y_1,\cdots,y_n))$。由于 $\exists y_1\cdots y_n(\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_m)$ 是 Σ_2 句子，因此有

$$\mathscr{U}\models\exists y_1\cdots y_n(\varphi_1(y_1,\ \cdots,\ y_n)\ \wedge\cdots\wedge\varphi_m(y_1,\ \cdots,\ y_n)).$$

再由 $\mathscr{U}\models T_1$，知 $T_1\cup T_2$ 有限和谐.

令 $\mathscr{U}'_B=(\mathscr{U}',b)_{b\in B}$是 $T_1\cup T_2$ 的一个模型，则 $\mathscr{U}'\equiv\mathscr{U}$，$\mathscr{B}\subseteq\mathscr{U}'$，且 $\mathscr{L}_B$ 中每个全称句如在 $\mathscr{B}_B$ 中真就在 $\mathscr{U}_B$ 中真。这样 $\mathscr{L}_B$ 中每个存在句如在 $\mathscr{U}_B$ 中真就在 $\mathscr{B}_B$ 中真. 令 $\mathscr{L}'=\mathscr{L}\cup B\cup(A'\backslash B)$. 仿上可以证明 $\Delta_{\mathscr{U}'_B}\cup\mathrm{Th}\mathscr{B}_B$ 和谐，其中 $\Delta_{\mathscr{U}'_B}$是 $\mathscr{U}_B$ 的图象，$\mathrm{Th}\mathscr{B}_B$ 是 $\mathscr{B}_B$ 的初等图象，这样有 $\mathscr{L}'$的模型 $(\mathscr{B}',\ a)_{a\in A'}\models\Delta_{\mathscr{U}'_B}\cup\mathrm{Th}\mathscr{B}_B$. 因此 $\mathscr{U}'\subseteq\mathscr{B}'$，$\mathscr{B}\prec\mathscr{B}'$. 这样我们证明了 (1) 成立。现在，在 $\mathscr{U}'$中真的Π_2 句子在 $\mathscr{U}$ 中真，因此，在 $\mathscr{B}$ 中真从而又在 $\mathscr{B}'$中真，(1) 可以重复使用。这样得到一个模型链.

(2) $\mathscr{B}=\mathscr{B}_0\subseteq\mathscr{U}_1\subseteq\mathscr{B}_1\subseteq\mathscr{U}_2\subseteq\mathscr{B}_2\subseteq\cdots$,

使对每个 $n<\omega$，$\mathscr{U}_n\equiv\mathscr{U}$，$\mathscr{B}_n\prec\mathscr{B}_{n+1}$，令 $\mathscr{U}_\omega$ 是模型链 (2) 的并. 易见 $\mathscr{U}_\omega$ 既是模型链 $\mathscr{U}_1\subseteq\mathscr{U}_2\subseteq\cdots$的并，也是 $\mathscr{B}_0\subseteq\mathscr{B}_1\subseteq\cdots$的并. 由于 $\mathscr{U}_n\models T$，T 在链并下保持，因此 $\mathscr{U}_\omega\models T$，而 $\mathscr{B}_0\prec\mathscr{B}_1\prec\mathscr{B}_2\prec\cdots$是初等链，由初等链定理，$\mathscr{B}_0\prec\mathscr{U}_\omega$，因而 $\mathscr{B}_0\models T$，即 $\mathscr{B}\models T$。这样引理 7.1.3 的 (ii) 成立，由 (i)，T 有Π_2 公理集。▌

一个公式 φ 称为**正公式**，如果 φ 是由原子公式经 $\wedge$，$\vee$ 和量词 $\forall$，$\exists$ 联结而成的公式。

定理 7.1.6 和谐理论 T 在同态下保持当且仅当 T 有正公理集，即 T 有正句子组成的公理集。

证明 ($\Leftarrow$) 对正公式 φ 的复杂度归纳证明 φ 在同态下保持。设 f: $\mathscr{U}\to\mathscr{B}$ 是同态映射，若 φ $(x_1\cdots x_n)$ 是原子公式，a_1，$\cdots$，$a_n\in A$，$\mathscr{U}\models\varphi[a_1,\cdots,a_n]$，则自然有 $\mathscr{B}\models\varphi[f(a_1),\cdots,f(a_n)]$，若 $\varphi=\psi_1\wedge\psi_2$ 或 $\varphi=\psi_1\vee\psi_2$，容易归纳证明结论成立。最后若 $\varphi=\exists x\psi(x,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)$，$\mathscr{U}\models\varphi[a_1,\ \cdots,\ a_n]$，则存在 $a\in A$，$\mathscr{U}\models\psi[a,\ a_1,\ \cdots,\ a_n]$，由归纳假设有
$\mathscr{B}\models\psi[f(a),\ f(a_1),\ \cdots,\ f(a_n)]$. 因此 $\mathscr{B}\models\varphi[a_1,\ \cdots,\ a_n]$

($\Rightarrow$) 现在设 T 在同态下保持。令 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 是模型，记 $\mathscr{U}\mathrm{pos}\mathscr{B}$ 为每个正句子若在 $\mathscr{U}$ 中真就在 $\mathscr{B}$ 中真。先证明如下结论：

(1) 如果 $\mathscr{U}\mathrm{pos}\mathscr{B}$，则存在 $\mathscr{B}'$，使 $\mathscr{B}\prec\mathscr{B}'$，$f$：$\mathscr{U}\widetilde{\subset}\mathscr{B}'$ 且 $(\mathscr{U},\ a)_{a\in A}$ pos $(\mathscr{B}',\ fa)_{a\in A}$
为此，令 $\mathscr{L}'=\mathscr{L}\cup A\cup B$. 令 T_1 是 $\mathscr{U}_A$ 中真的 $\mathscr{L}_A$ 的正句子的全集，T_2 是 $\mathscr{B}_B$ 中真的 $\mathscr{L}_B$ 的全部句子的集合。由于 $\mathscr{U}\mathrm{pos}\mathscr{B}$，易见 $T_1\cup T_2$ 和谐。令 $(\mathscr{B}',\ a',\ b)_{a\in A,b\in B}$ 是 $T_1\cup T_2$ 的模型。由于 T_2 即 $\mathscr{B}$ 的初等图象，有 $\mathscr{B}\prec\mathscr{B}'$，由于 $\mathscr{U}$ 的图象 $\Delta_{\mathscr{U}}\subset T_1$，有 f：$\mathscr{U}\widetilde{\subset}\mathscr{B}'$，$f(a)=a'$. 由于 $(\mathscr{B}',\ a')_{a\in A}\models T_1$，还有 $(\mathscr{U},\ a)_{a\in A}$ $\mathrm{pos}(\mathscr{B}',f(a))_{a\in A}$.

类似的讨论也可以证明与 (1) 对偶的结论：

(2) 如果 $\mathscr{U}\mathrm{pos}\mathscr{B}$，则存在 $\mathscr{U}'$，使 $\mathscr{U}\prec\mathscr{U}'$，$g$：$\mathscr{B}\widetilde{\subset}\mathscr{U}'$，且 $(\mathscr{U}',\ gb)_{b\in B}\mathrm{pos}(\mathscr{B},\ b)_{b\in B}$.
只要将 (1) 证明的 T_1 改为 $\mathscr{U}$ 的初等图象，T_2 改为 $\mathscr{B}_B$ 中不满足的 $\mathscr{L}_B$ 的正句子的否定句的全集即容易看出 (2) 成立。

现在令$\mathscr{U}_0$，$\mathscr{B}_0$是模型，$\mathscr{U}_0 \models T$，$\mathscr{U}_0 \text{pos} \mathscr{B}_0$，交替重复地应用（1）和（2）可得两个模型链：

$$\begin{array}{ccccccc} \mathscr{U}_0 & \prec & \mathscr{U}_1 & \prec & \mathscr{U}_2 & \prec & \cdots \\ & \searrow^{f_0} & \uparrow^{g_1} & \searrow^{f_1} & \uparrow^{g_2} & & \\ \mathscr{B}_0 & \prec & \mathscr{B}_1 & \prec & \mathscr{B}_2 & \prec & \cdots \end{array}$$

使 $$(\mathscr{U}_0,\ a)_{a\in A_0} \text{pos} (\mathscr{B}_1,\ f_0 a)_{a\in A_0};$$

$$(\mathscr{U}_1, a, g_1 b)_{a\in A_0, b\in B} \text{pos} (\mathscr{B}_1, f_0 a, b)_{a\in A_0, b\in B};$$

$$(\mathscr{U}_1, a, g_1 b, a')_{a\in A_0, b\in B_1, a'\in A_1} \text{pos} (\mathscr{B}_2, f_0 a, b, f_1 a'_1)_{a\in A_0, b\in B_1, a'\in A_1}.$$

等等. 对每个n，$f_n: \mathscr{U}_n \to \mathscr{B}_{n+1}$，$f_n$是$\mathscr{U}_n$到$\mathscr{B}_{n+1}$内的同态映射，且$f_n \subset f_{n+1}$，$g_{n+1}^{-1} \subset f_{n+1}$.

令$\mathscr{U}_\omega = \bigcup_{n<\omega} \mathscr{U}_n$，$B_\omega = \bigcup_{n<\omega} \mathscr{B}_n$分别是两个初等链的并. 令$f_\omega = \bigcup_{n<\omega} f_n$，则对每个$n<\omega$，$g_n^{-1} \subset f_\omega$，因此$f_\omega$是$\mathscr{U}_\omega$到$\mathscr{B}_\omega$上的同态映射. 由初等链定理$\mathscr{U}_0 \prec \mathscr{U}_\omega$，$\mathscr{B}_0 \prec \mathscr{B}_\omega$，因此$\mathscr{U}_\omega \models T$。由$T$在同态下保持得知$\mathscr{B}_\omega \models T$，因此有$\mathscr{B}_0 \models T$. 这样由引理 7.1.3 T有正公理集。 ▌

把以上保持性定理中理论T改为单个的句子，可得到如下结论：

推论 7.1.7 一个和谐句子在（a）子模型下保持，（b）链并下保持，（c）同态下保持当且仅当这个句子分别逻辑等价于（a）全称句，（b）全称存在句，（c）正句子。

证明 只证（a）作代表，其余均一样。每个全称句子显然在子模型下保持。如果句子φ在子模型下保持，令$T = \{\varphi\}$，由定理 7.1.4，T有全称公理集Γ，$\Gamma \models \varphi$. 由紧致性定理必有Γ的有限子集$r_1, \cdots, r_n \in \Gamma$，使$r_1 \wedge \cdots \wedge r_n \models \varphi$. 令$r = r_1 \wedge \cdots \wedge r_n$，由$\Gamma \models r$，有$\varphi \models r$，因此$\varphi$逻辑等价于全称句子$r$. ▌

由以上保持性定理不难看出偏序理论在子模型下保持，也在链并下保持，而不在同态下保持。布尔代数理论在链并下保持而

不在子模型下和同态模型下保持。群理论在链并下和在同态下保持，而不在子模型下保持。域理论和代数闭域理论的保持性与布尔代数理论一致。Peano 算术理论都不保持。

以后我们还将会看到初等链定理还有许多应用，因此是模型论的重要定理，初等链方法是构造模型的重要方法之一。

练习

7.1.1　证明理论 T 在扩充模型下保持当且仅当 T 有存在公理集。

7.1.2　证明理论 T 若在子模型下保持则必在链并下保持。

7.1.3　设 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{L}$ 的模型，$\mathscr{U}\subset\mathscr{B}$，称 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{U}$ 的 Σ_n 扩充，如果每个 Σ_n 公式 φ $(x_1\cdots x_n)$，任意 a_1，…，$a_n\in A$，只要 $\mathscr{U}\models\varphi[a_1\cdots a_n]$ 就有 $\mathscr{B}\models\varphi[a_1\cdots a_n]$，记作 $\mathscr{U}\subset_n\mathscr{B}$，称模型链 $\mathscr{U}_\beta$，$\beta<\alpha$，为 Σ_n 链，如果

$$\mathscr{U}_0\subset_n\mathscr{U}_1\subset_n\cdots\subset_n\mathscr{U}_\beta\subset\cdots$$

证明 Σ_n 链的并模型 $\mathscr{U}=\bigcup\limits_{\beta<\alpha}\mathscr{U}_\beta$ 是链中每个模型 $\mathscr{U}_\beta$ 的 Π_{n+1} 扩充，即 $\mathscr{U}_\beta\prec_{n+1}\mathscr{U}$. （见练习 6.2.3）

7.1.4　设 $\mathscr{L}=\{\leqslant\}$，$\varphi=\exists x\forall y\,(x\leqslant y)$，证明 φ 不等价于 Π_2 句子。

§7.2　省略型定理

设 $\mathscr{L}$ 是形式语言，以 $\Sigma(x_1, \cdots, x_n)$ 表示 $\mathscr{L}$ 中自由变元都在 x_1，…，x_n 之中的公式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 的集合。设 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{L}$ 的模型，元素 a_1，…，$a_n\in A$，$\mathscr{U}\models\Sigma[a_1, \cdots, a_n]$，表示对任意公式 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)\in\Sigma(x_1,\cdots,x_n)$，都有 $\mathscr{U}\models\varphi[a_1,\cdots,a_n]$。

设 c_1，…，c_n 是 $\mathscr{L}$ 中常量，$\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 是 $\mathscr{L}$ 的公式，

$\varphi(c_1, \cdots, c_n)$表示以 $c_1, \cdots, c_n$ 同时代换 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 中自由出现的 $x_1, \cdots, x_n$ 所得句子。$\Sigma(c_1, \cdots, c_n)$ 表示以 $c_1, \cdots, c_n$ 同时代换 $\Sigma(x_1, \cdots, x_n)$ 中所有公式中自由变元 $x_1, \cdots, x_n$ 后所得句子的集合。

设 $\Sigma(x_1, \cdots, x_n)$ 是 $\mathscr{L}$ 的公式集. $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{L}$ 的模型，称模型 $\mathscr{U}$ **实现** $\Sigma(x_1, \cdots, x_n)$，如果存在 $a_1, \cdots, a_n \in A$ 使 $\mathscr{U} \models \Sigma[a_1, \cdots, a_n]$. 如果 $\mathscr{U}$ 不实现 $\Sigma(x_1, \cdots, x_n)$ 就称 $\mathscr{U}$ **省略** $\Sigma(x_1, \cdots, x_n)$，这时对任意 $a_1, \cdots, a_n \in A$，都存在 $\varphi(x_1, \cdots, x_n) \in \Sigma(x_1, \cdots, x_n)$，使 $\mathscr{U} \models \neg\varphi[a_1, \cdots, a_n]$. 设 T 是 Peano 算术理论，$\Sigma(x) = \{x \neq 0, x \neq So, x \neq SSo, \cdots\}$. 则 T 的标准模型省略 $\Sigma(x)$，T 的非标准模型实现 $\Sigma(x)$.

设 T 是序域理论，$\Sigma(x) = \{x \geqslant 1, x \geqslant 1+1, \cdots\}$. 则阿基米德序域省略 $\Sigma(x)$，例如实数，复数域省略 $\Sigma(x)$，而非阿基米德域实现 $\Sigma(x)$.

$\mathscr{L}$ 的公式集 $\Gamma(x_1, \cdots, x_n)$ 如果是极大和谐的公式集，则称为 $\mathscr{L}$ 的变元 $x_1, \cdots, x_n$ 的**型**。设 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{L}$ 的模型，$a_1, \cdots, a_n \in A$，令

$$\Gamma(x_1, \cdots, x_n) = \{\varphi(x_1, \cdots, x_n):\quad \mathscr{U} \models \varphi[a_1, \cdots, a_n]\},$$

则 $\Gamma(x_1, \cdots, x_n)$ 是极大和谐公式集，称为模型 $\mathscr{U}$ 的元素 $a_1, \cdots, a_n$ 实现的型。

设 $\mathscr{U}$ 是实数序域，任 $a, b \in A$，如果 $a \neq b$，不妨设 $a < b$，则存在有理数 $r = \frac{n}{m}$，使 $a < r < b$，这时 $mx < n$ 是序域语言中公式，其中 mx 是$\underbrace{(x + \cdots + x)}_{m个}$的简写，$n$ 是$\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n个}$的简写，令 $\Gamma_1(x)$，$\Gamma_2(x)$分别是 $\mathscr{U}$ 的元素 a, b 实现的型，则由 $\mathscr{U}$ 中 $ma < n$，$mb \nless n$ 知 $mx < n \in \Gamma_1(x)$，$mx < n \notin \Gamma_2(x)$. 这样 $\mathscr{U}$ 中任意两个不同的元素实现不同的型。因此模型 $\mathscr{U}$ 有不可数多个单变元的型。

命题 7.2.1 设 $\mathscr{L}$ 是形式语言，T 是 $\mathscr{L}$ 的理论，

$\Sigma(x_1, \cdots, x_n)$ 是 $\mathscr{L}$ 的公式集，则以下三条件互相等价：

（Ⅰ）T 有一个模型实现 $\Sigma(x_1, \cdots, x_n)$；

（Ⅱ）$\Sigma(x_1, \cdots, x_n)$ 的每个有限子集都被 T 的某个模型实现；

（Ⅲ）$\Sigma(x_1, \cdots, x_n)$ 的每个有限子集都与 T 和谐，即对任意有限个公式 $\varphi_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,\varphi_m(x_1,\cdots,x_n)\in\Sigma(x_1,\cdots,x_n)$，$T\cup\{\exists x_1\cdots x_m(\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_n(x_1\cdots x_n))\}$和谐。

证明 （Ⅰ）⇒（Ⅱ）⇒（Ⅲ）是显然的。证（Ⅲ）⇒（Ⅰ）. 令 $c_1,\cdots, c_n$ 是互不相同的新常量，由（Ⅲ）可知 $T\cup\Sigma$ $(c_1, \cdots, c_n)$ 有限和谐，由紧致性定理 $T\cup\Sigma(c_1,\cdots,c_n)$ 有模型 $(\mathscr{U}, a_1, \cdots, a_n)$，则归约模型 $\mathscr{U}\models T$，且 $\mathscr{U}\models\Sigma$ $[a_1, \cdots, a_n]$. ▌

设 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 是 $\mathscr{L}$ 的公式，T 是 $\mathscr{L}$ 的理论，如果 $T\cup\{\exists x_1\cdots x_n\varphi(x_1,\cdots,x_n)\}$和谐，就称公式 $\boldsymbol{\varphi}$ $(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$ **与理论 $\boldsymbol{T}$ 和谐**。由命题 7.2.1 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 与 T 和谐当且仅当 T 有模型实现 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$.

设 $\Sigma(x_1, \cdots, x_n)$ 是 $\mathscr{L}$ 的公式集，T 是 $\mathscr{L}$ 的理论，如果存在与 T 和谐的公式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$，使对任意公式 $\sigma(x_1,\cdots,x_n)\in\Sigma(x_1,\cdots,x_n)$. 都有 $T\models\varphi\to\sigma$，就称理论 T **局部实现** $\Sigma(x_1, \cdots, x_n)$. 这里 $T\models\varphi\to\sigma$ 是 $T\models\forall x_1\cdots x_n(\varphi(x_1,\cdots,x_n)\to\sigma(x_1,\cdots,x_n))$ 的简写.

如果理论 T 不局部实现 $\Sigma(x_1, \cdots, x_n)$，就称 T **局部省略** $\Sigma(x_1, \cdots, x_n)$，易见 T 局部省略 $\Sigma(x_1, \cdots, x_n)$ 当且仅当对任意一个与 T 和谐的公式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$，都有公式 $\sigma(x_1,\cdots,x_n)\in\Sigma(x_1,\cdots,x_n)$，使 T 与 $\varphi\wedge\neg\sigma(x_1, \cdots, x_n)$ 和谐。

命题 7.2.2 设 T 是完全理论，T 有模型省略公式集 $\Sigma(x_1, \cdots, x_n)$，则 T 局部省略 $\Sigma(x_1, \cdots, x_n)$.

证明 设 T 局部实现 Σ $(x_1, \cdots, x_n)$，则存在与 T 和谐的公式 φ $(x_1, \cdots, x_n)$，使对任意公式 $\sigma(x_1,\cdots,x_n)\in\Sigma(x_1,\cdots,x_n)$，都有 $T\models\varphi\to\sigma$. 由于 T 是完全理论，$T\cup\{\exists x_1\cdots x_n\varphi(x_1,\cdots,x_n)\}$ 和

谐，则 $T\models\exists x_1\cdots x_n\varphi(x_1,\cdots,x_n)$. 因此，对 T 的任意模型 $\mathscr{U}$，都存在 $a_1,\cdots,a_n\in A$ 使 $\mathscr{U}\models\varphi[a_1,\cdots,a_n]$，这样对任意公式 $\sigma(x_1,\cdots,x_n)\in\Sigma(x_1,\cdots,x_n)$，都有 $\mathscr{U}\models\sigma[a_1,\cdots a_n]$，于是 $\mathscr{U}\models\Sigma[a_1,\cdots,a_n]$，即 T 的任意模型实现 $\Sigma(x_1,\cdots x_n)$，得到矛盾。 ▌

作为上述命题 7.2.2 的逆命题，我们有如下定理。

定理 7.2.3 **(省略型定理)** 设 $\mathscr{L}$ 是可数语言，T 是 $\mathscr{L}$ 的和谐理论，T 局部省略公式集 $\Sigma(x_1,\cdots,x_n)$，则 T 有一个可数模型省略 $\Sigma(x_1,\cdots,x_n)$.

证明 为简明起见，我们只对单变量公式集 $\Sigma(x)$ 证明上述定理，对 $\Sigma(x_1\cdots x_n)$ 的情况的证明是完全一样的。

令 $C=\{c_0,c_1,\cdots\}$ 是不在 $\mathscr{L}$ 中出现的可数多个新常量，令 $\mathscr{L}'=\mathscr{L}\cup C$，$\mathscr{L}'$ 仍是可数语言. 列出 $\mathscr{L}'$ 的全部句子：$\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\cdots\varphi_n,\cdots n<\omega$. 归纳地构造 $\mathscr{L}'$ 的句子集的递增序列：

$$T=T_0\subset T_1\subset T_2\subset\cdots\subset T_m\subset\cdots,\ m<\omega,$$

使满足下列四个条件：

(1) 对每个 $m<\omega$，T_m 是 T 的有限扩充，T_m 是 $\mathscr{L}'$ 中和谐理论；

(2) 对任意 $m<\omega$，$\varphi_m\in T_{m+1}$，或 $\neg\varphi_m\in T_{m+1}$；

(3) 若 $\varphi_m\in T_{m+1}$，且 $\varphi_m=\exists x\psi(x)$，则有常量 $c_p\in C$，c_p 不出现于 T_m 及 φ_m 中，$c_p\neq c_m$，使 $\psi(c_p)\in T_{m+1}$；

(4) 对每个 $m<\omega$，都有一个公式 $\sigma(x)\in\Sigma(x)$，使 $\neg\sigma(c_m)\in T_{m+1}$.

设 T_m 已构造. $T_m=T\cup\{\theta_1(c_0,\cdots,c_n),\cdots\theta_r(c_0,\cdots,c_n)\}$，$\theta_1(c_0,\cdots,c_n),\cdots,\theta_r(c_0,\cdots,c_n)$是 $\mathscr{L}'$ 中有限多个句子，新常量都在 $c_0,\cdots,c_n$ 之中. 令 $\theta=\theta_1\wedge\cdots\wedge\theta_r(c_0,\cdots c_n)$. 由于 T_m 和谐，知 $\theta(x_0,\cdots,x_n)$与 T 和谐. 不妨设$0\leqslant m\leqslant n$，令 $\theta'(x_m)=\exists x_0\cdots x_{m-1}x_{m+1}\cdots x_n\theta(x_0,\cdots,x_n)$，则$\theta'(x_m)$与 T 和谐。如

果 $m>n$，则令$\theta'(x_m)=\exists x_0\cdots x_n\theta(x_0,\cdots x_n))$. 由 T 局部省略 $\Sigma(x)$ 知存在$\sigma(x)\in\Sigma(x)$，使 T 与$\theta'(x_m/x)\wedge\neg\sigma(x)$和谐。因此有 $T\cup\{\theta'(c_m)\wedge\neg\sigma(c_m)\}$和谐。这样$T_m\cup\{\neg\sigma(c_m)\}$和谐，可以把 $\neg\sigma(c_m)$添加进 T_{m+1}而使（4）成立。

设 φ_m 与 $T_m\cup\{\neg\sigma(c_m)\}$ 和谐，则令 $\varphi_m\in T_{m+1}$，否则令 $\neg\varphi_m\in T_{m+1}$，这样有（2）成立。

若 φ_m 与 $T_m\cup\{\neg\sigma(c_m)\}$ 和谐，且 $\varphi_m=\exists x\psi(x)$，取不在 T_m 及 $\sigma(c_m)$中出现的 C 中第一个常量 c_p，则$\psi(c_p)$与$T_m\cup\{\neg\sigma(c_m),\varphi_m\}$ 和谐，令$\psi(c_p)\in T_{m+1}$. 这样（3）成立。

由以上构造，T_{n+1}是 T_m 增加有限个句子构成的和谐句子集，因此（1）成立。这样归纳构造完成。

令 $T_\omega=\bigcup\limits_{n<\omega}T_n$. 由（2）知 T_ω 是 $\mathscr{L}'$ 中极大和谐句子集。因此 T_ω 有模型 $\mathscr{B}'=$（$\mathscr{B}$，b_0，b_1，$\cdots$），其中 b_0，b_1，$\cdots$，分别是 c_0，c_1，$\cdots$，的解释。

令 $A=\{b_0,b_1,\cdots\}\subset B$，由（3）及 § 2.2 例 4 知 A 对 $\mathscr{L}$ 的函数及常量封闭。因此由 A 作论域可生成 $\mathscr{B}'$的子模型 $\mathscr{U}'$，$\mathscr{U}'=(\mathscr{U},b_0,b_1,\cdots)$. $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{L}$ 的可数模型。

对 $\mathscr{L}'$ 的句子的复杂性不难证明，对任意句子 φ，$\varphi\in T_\omega$ 当且仅当 $\mathscr{U}'\models\varphi$。

φ是原子句子时，$\mathscr{U}'\models\varphi$ 当且仅当 $\mathscr{B}'\models\varphi$ 当且仅当 $\varphi\in T_\omega$. $\varphi=\varphi_1\wedge\varphi_2,\varphi=\neg\varphi$，由归纳易证。

设 $\varphi=\exists x\psi(x)$，如果 $\mathscr{U}'\models\exists x\psi(x)$，则存在 $c\in C$，使 $\mathscr{U}'\models\psi(c)$，由归纳假设$\psi(c)\in T_\omega$，由 T_ω 极大和谐知$\exists x\psi(x)\in T_\omega$. 如果$\exists x\psi(x)\in T_\omega$，则由（3）必有 $c_p\in C$ 使$\psi(c_p)\in T_\omega$，从而 $\mathscr{U}'\models\psi(c_p)$. $\mathscr{U}'\models\exists x\psi(x)$。

由此我们有 $\mathscr{U}'\models T_\omega$. 又因为$T\subset T_\omega$，所以 $\mathscr{U}\models T$. 再由 T_ω 的构造（4）知 $\mathscr{U}$ 省略 $\Sigma(x)$。 ▌

结合命题 7.2.2 和定理 7.2.3，我们得到如下推论。

推论 7.2.4 设 $\mathscr{L}$ 是可数语言，T 是 $\mathscr{L}$ 的和谐理论，则 T 有一个可数模型省略公式集 $\Sigma(x_1, \cdots, x_n)$ 当且仅当 T 有完全扩充 $\overline{T}$ 局部省略 $\Sigma(x_1, \cdots, x_n)$。

证明 (⇒) 设 T 有可数模型 $\mathscr{U}$ 省略 $\Sigma(x_1, \cdots x_n)$. 令 $\overline{T}=\mathrm{Th}\mathscr{U}$. 则 $\overline{T}$ 是完全理论，$\overline{T}$ 有可数模型 $\mathscr{U}$ 省略 $\Sigma(x_1, \cdots, x_n)$. 由命题 7.2.2，$\overline{T}$ 局部省略$\Sigma(x_1, \cdots, x_n)$.

(⇐) 设 $\overline{T}$ 局部省略 $\Sigma(x_1, \cdots, x_n)$，由定理 7.2.3，$\overline{T}$ 有可数模型省略 $\Sigma(x_1, \cdots, x_n)$，而此即 T 的可数模型。 ▍

省略型定理是构造模型的一个有效方法，在模型论中有许多应用。下面介绍省略型定理在 **ω-逻辑**中的一个应用。

令 $\mathscr{L}=\{+, \cdot, S, 0\}$ 其中+，·，是二元函数符号，S 是一元函数符号，也称为后继函数符号，记 $1=S0$，$2=SS0$，…. 令 $\omega=\{0, 1, 2, \cdots\}$. 以 ω 为论域的模型$\mathscr{U}=\langle\omega, +, \cdot, S, 0\rangle$ 称为 **ω 模型**。令 $\Sigma(x)=\{x\neq 0, x\neq 1, x\neq 2, \cdots\}$ 是 $\mathscr{L}$ 的公式集。易见 ω 模型 $\mathscr{U}$ 省略 $\Sigma(x)$. 反过来，$\mathscr{L}$ 中任意一个省略 $\Sigma(x)$ 的可数无限模型是 ω 模型。

设 T 是 $\mathscr{L}$ 的一个理论。如果 $\mathscr{L}$ 中不存在公式 $\psi(x)$ 能使 $T\models\psi(0)$，$T\models\varphi(1)$，$T\models\varphi(2)$，…，且 $T\models\exists x\neg\varphi(x)$，则称 T 为 **ω 和谐**的理论. 如果对 $\mathscr{L}$ 中的每个公式 $\varphi(x)$，只要$T\models\varphi(0)$，$T\models\varphi(1)$，$T\models\varphi(2)$，…，就有 $T\models\forall x\varphi(x)$，就称 T 是 **ω 完全理论**。

命题 7.2.5 设 T 是 $\mathscr{L}$ 的和谐理论，证明

(i) 如果 T 是 ω 完全理论，则 T 有 ω 模型；

(ii) 如果 T 有一个 ω 模型，则 T 是 ω 和谐理论。

证明 (ii) 是显然的，我们只证明 (i)，设 T 是 ω 完全理论，先证明 T 局部省略公式集 $\Sigma(x)=\{x\neq 0, x\neq 1, x\neq 2, \cdots\}$. 设 $\mathscr{L}$ 的公式 $\theta(x)$ 与 T 和谐，则 $T\not\models\forall x\neg\theta(x)$，由 T 是 ω 完全理论知不能同时有 $T\models\neg\theta(0)$，$T\models\neg\theta(1)$，$T\models\neg\theta(2)$，…这样必存

在一个 $n<\omega$，使 $T\nvdash\neg\theta(n)$，因此 $T\cup\{\theta(n)\}$ 和谐. 这样 T 与 $\theta(x)\wedge x\equiv n$ 和谐，也就是 T 与 $\theta(x)\wedge\neg(x\not\equiv n)$ 和谐. 由 $x\not\equiv n\in\Sigma(x)$，知 T 局部省略 $\Sigma(x)$.

由省略模型定理知 T 有可数模型 $\mathscr{U}$ 省略 $\Sigma(x)$. 这个模型必是 ω 模型。 ▌

在含＋，·，S，0 的一阶形式语言 $\mathscr{L}$ 中增加如下一条新的规则，得到 **ω 逻辑**：

由 $\varphi(0)$，$\varphi(1)$，$\varphi(2)$，…得 $\forall x\varphi(x)$，

其中 $\varphi(x)$ 是 $\mathscr{L}$ 的任意公式，称这一新规则为 **ω 规则**。

定理 7.2.6 （**ω 完全性定理**）语言 $\mathscr{L}$ 的一个理论 T 在 ω 逻辑中和谐当且仅当 T 有 ω 模型。

证明 令 $\overline{T}=\{\varphi\colon T\vdash_{\omega}\varphi,\ \varphi$ 是 $\mathscr{L}$ 的句子$\}$，其中 $T\vdash_{\omega}\varphi$ 表示在 ω 逻辑中有句子集 T 到 φ 的一个推演证明。这时 T 在 ω 逻辑中和谐当且仅当 $\overline{T}$ 在 $\mathscr{L}$ 中和谐，而 $\overline{T}$ 是 ω 完备的理论，由定理 7.2.5 $\overline{T}$ 有 ω 模型，因此 T 有 ω 模型。 ▌

定理 7.2.7 ω 逻辑中紧致性定理不成立.

证明 设 $\mathscr{L}$ 中含有＋，·，S，0，以及一个常量符号 c. 令 $T=\{c\not\equiv 0,\ c\not\equiv 1,\ c\not\equiv 2,\ \cdots,\ \exists x\ (c\equiv x)\}$，$T$ 是 $\mathscr{L}$ 的句子集。易见在 ω 逻辑中 T 的任意有限子集都有 ω 模型. 但任意 ω 模型中 T 不成立，由定理 7.2.6 T 在 ω 逻辑中不和谐。 ▌

我们已经证明对有限多个变元的公式集 $\Sigma(x_1,\cdots,x_n)$ 的省略型定理。下面的例子说明对无限多个变元的公式集 $\Sigma(x_0,x_1,x_2,\cdots)$，省略型定理不成立。

设 $\mathscr{L}=\{\leqslant\}$，$T$ 是 $\mathscr{L}$ 的无端点稠密线性序理论. 令 $\Sigma=\{x_1<x_0,\ x_2<x_1,\ x_3<x_2,\ \cdots\}$，其中 $x<y$ 是 $x\leqslant y\wedge x\not\equiv y$ 的简写。$\mathscr{L}$ 的任意一个可数模型 $\mathscr{U}$，$\mathscr{U}$ 省略 Σ 当且仅当 $\mathscr{U}$ 是良序模型。但 T 没有良序模型。因此 T 的任意模型都不省略 Σ. 然而，对任意公式 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$，如果 T 与 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 和谐，则

有 $x_{n+2}<x_{n+1}\in\Sigma$，使 T 与 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)\wedge(\neg x_{n+2}<x_{n+1})$ 和谐。这就是说 T 局部省略公式集 Σ.

虽然对无限多个变元的公式集省略型定理不成立，但是对无限多个有限变元的公式集仍有省略型定理。

定理 7.2.8 设 $\mathscr{L}$ 是可数语言，T 是 $\mathscr{L}$ 的和谐理论。$\Sigma_1(x_1,\cdots,x_{n_1}),\Sigma_2(x_1,\cdots,x_{n_2}),\cdots,\Sigma_r(x_1,\cdots,x_{n_r}),\cdots$ 是 $\mathscr{L}$ 的公式集，如果 T 局部省略每个 $\Sigma_r(x_1,\cdots,x_{n_r})$，则 T 有可数模型省略所有的 $\Sigma_r(x_1,\cdots,x_{n_r})$.

证明 仿照定理 7.2.3 的证明，令 $\mathscr{L}'=\mathscr{L}\cup C$，其中 $C=\{c_0,c_1,\cdots\}$ 是可数多个新常量的集合，以 C^{n_i} 记 C 的常量的 n_i 元组的全体组成的集合，以 $s_r^r,s_{r+1}^r,\cdots$，记 C^{n_r} 的一个枚举，即每个 s_{r+i}^r 都是 C 的 n_r 个常量组成的序对。这样得到如下一表：

$s_1^1,\ s_2^1,\ s_3^1,\ s_4^1,\ \cdots$ C 的 n_1 元组的枚举

$s_2^2,\ s_3^2,\ s_4^2,\ \cdots$ C 的 n_2 元组的枚举

$s_3^3,\ s_4^3,\ \cdots$ C 的 n_3 元组的枚举

…

列出 $\mathscr{L}'$ 的全部句子：$\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_m,\cdots$，构造 $\mathscr{L}'$ 的和谐理论的递增序列

$T=T_0\subset T_1\subset T_2\subset\cdots\subset T_m\subset\cdots$，使

(i) 对每个 $m<\omega$，T_m 是 T 的有限扩充，T_m 和谐；

(ii) 对任意 $m<\omega$，$\varphi_m\in T_m$ 或 $\neg\varphi_m\in T_m$；

(iii) 如果 $\varphi_m\in T_{m+1}$，$\varphi_m=\exists x\psi(x)$，则有常量 $c_p\in C$，c_p 不在 $T_m\cup\{\varphi_m\}$ 中出现. $c_p\notin S_m^r$，$r\leqslant m$，使 $\psi(c_p)\in T_{m+1}$；

(iv) 对每个 $r\leqslant m$，都有公式 $\sigma(x_1,\cdots,x_{n_r})\in\Sigma_r(x_1,\cdots,x_{n_r})$，使 $\neg\sigma(S_m^r)\in T_{m+1}$.

令 $T_\omega=\bigcup\limits_{m<\omega}T_m$，与定理 7.2.3 证明一样可得到可数模型 $\mathscr{U}'\models T_\omega$，$\mathscr{U}'=(\mathscr{U},c_0,c_1,\cdots)$. 这样 $\mathscr{U}\models T$，$\mathscr{U}$ 省略每个

$\Sigma_r(x_1, \cdots, x_{n_r})$. ▌

练习

7.2.1　设 T 是可数语言 $\mathscr{L}$ 的完全理论，$\Gamma_1(x_1)$，$\Gamma_2(x_2)$，$\Gamma_3(x_3)$，…是 $\mathscr{L}$ 的可数多个公式集，对每个 $n<\omega$，$\Gamma_n(x_n)$ 与 T 和谐，则 T 有一个可数模型能实现所有公式集 $\Gamma_n(x_n)$.

7.2.2　设 $\mathscr{L}$ 可数，T 是 $\mathscr{L}$ 的和谐理论，公式集 $\Sigma(x)$，$\Delta(y)$ 都与 T 和谐，对 $\mathscr{L}$ 的任意公式 $\varphi(x, y)$，都存在 $\sigma(x)\in\Sigma(x)$，对任意 $\delta_1(y), \cdots, \delta_n(y)\in\Delta(y)$，如果 $\{\varphi, \delta_1, \cdots, \delta_n\}$ 与 T 和谐，则 $\{\varphi, \delta_1, \cdots, \delta_n, \neg\sigma\}$ 与 T 和谐. 证明 T 有可数模型实现 $\Delta(y)$ 省略 $\Sigma(x)$.

7.2.3　设 $\mathscr{L}$ 可数，T 是 $\mathscr{L}$ 的完全理论，$\Sigma_0(x)$，$\Sigma_1(x)$，$\Sigma_2(x)$，…是 $\mathscr{L}$ 的公式集，对每个 $n<\omega$，T 有模型 $\mathscr{U}_n$ 省略 $\Sigma_n(x)$，则 T 有模型 $\mathscr{U}$ 省略每个公式集 $\Sigma_n(x)$.

7.2.4　证明 L—S—T 定理在 ω 逻辑中不成立。

§7.3　内插定理

与省略型定理一样，内插定理也是模型论的重要定理。内插定理有各种形式，我们只证明 Craig 内插定理，并给出它的几个应用。

定理 7.3.1　**(Craig 内插定理)**　设 φ, ψ 是两个句子，$\varphi\models\psi$，则存在句子 θ，使

(i) $\varphi\vdash\theta$，$\theta\vdash\psi$；

(ii) θ 中出现的每个非逻辑符号，都在 φ, ψ 中同时出现。

注意 φ, ψ 中可以没有同时出现的非逻辑符号。例如 φ 是恒假式，或 ψ 是恒真式时，可以取 θ 为只含等号的恒假式。

证明 假设 Craig 内插定理不成立，我们证明 $\varphi \nvdash \psi$，即 $\varphi\wedge\neg\psi$ 有模型。

设 $\mathscr{L}$ 是 φ,ψ 中出现的全体非逻辑符号组成的语言，$\mathscr{L}_1$，$\mathscr{L}_2$ 分别是 φ 和 ψ 中非逻辑符号组成的语言，$\mathscr{L}_0$ 是 φ、ψ 中同时出现的非逻辑符号组成的语言，易见有 $\mathscr{L}_1\cup\mathscr{L}_2=\mathscr{L}$，$\mathscr{L}_1\cap\mathscr{L}_2=\mathscr{L}_0$.

令 C 是可数新常量集，$\mathscr{L}'_0=\mathscr{L}_0\cup C$，$\mathscr{L}'_1=\mathscr{L}_1\cup C$，$\mathscr{L}'_2=\mathscr{L}_2\cup C$，$\mathscr{L}'=\mathscr{L}\cup C$. 设，$T$、$U$ 分别是 $\mathscr{L}'_1$，$\mathscr{L}'_2$ 上理论，θ 是 $\mathscr{L}'_0$ 的句子，称 θ 分离 T，U，如果有 $T\vdash\theta$，$U\vdash\neg\theta$. 如果 $\mathscr{L}'_0$ 中任何句子都不分离 T，U，则称 T，U **不可分**。由此可以判定 φ，$\neg\psi$ 不可分。不然有句子 θ $(c_1,\cdots,c_n)$ 分离 φ 和 $\neg\psi$，则 $\varphi\vdash\theta(c_1,\cdots,c_n)$，$\neg\psi\vdash\neg\theta(c_1,\cdots,c_n)$. 由 c_1，…，c_n 是新常量，$\varphi\vdash\forall x_1\cdots x_n\theta(x_1,\cdots,x_n)$. $\neg\psi\vdash\neg\exists x_1,\cdots,x_n\theta(x_1,\cdots,x_n)$，后式可变为 $\forall x_1\cdots x_n\theta(x_1,\cdots,x_n)\vdash\psi$. 这样 φ，ψ 有内插公式 $\forall x_1\cdots x_n\theta(x_1,\cdots,x_n)$，与假设不符。

下面我们证明在 $\mathscr{L}'_1$ 和 $\mathscr{L}'_2$ 中 $\{\varphi\}$、$\{\neg\psi\}$ 可以分别扩充为极大和谐句子集 T 和 U，使 T，U 仍不可分。

枚举 $\mathscr{L}'_1$ 和 $\mathscr{L}'_2$ 的全部句子：

φ_0，φ_1，φ_2，…，φ_m，…，　$m<\omega$

ψ_0，ψ_1，ψ_2，…，ψ_m，…，　$m<\omega$

归纳构造 $\mathscr{L}'_1$，$\mathscr{L}'_2$ 的递增的句子集序列：

$\{\varphi\}=T_0\subset T_1\subset\cdots\subset T_m\subset$

$\{\neg\psi\}=U_0\subset U_1\subset\cdots\subset U_m\subset\cdots$

使对每个 $m<\omega$

(1) T_m 与 U_m 是不可分的有限句子集；

(2) 若 $T_m\cup\{\varphi_m\}$ 与 U_m 不可分，有 $\varphi_m\in T_{m+1}$；

若 T_{m+1} 与 $U_m\cup\{\psi_m\}$ 不可分，有 $\psi_m\in U_{m+1}$；

(3) 若 $\varphi_m\in T_{m+1}$，且 $\varphi_m=\exists x\sigma(x)$ 则有 $c\in C$，使 $\sigma(c)\in T_{m+1}$；

若 $\psi_m \in U_{m+1}$，且 $\psi_m = \exists x\delta(x)$，则有 $d \in C$，使 $\delta(d) \in U_{m+1}$，以上 c、d 均不在 T_m，U_m，φ_m 及 ψ_m 中出现。

设 T_m，U_m 已构造，如果 T_{m+1}，U_{m+1}已按（2）、（3）要求构造，我们证明 T_{m+1}，U_{m+1}仍满足（1）. 显然只要考虑 $\sigma(c) \in T_{m+1}$，$\delta(d) \in U_{m+1}$的情况。

设 $\{\varphi_m\} \cup T_m$ 与 U_m 不可分，c 不在 $T_m \cup \{\varphi_m\}$ 中出现，我们证明 T_{m+1}与 U_m 也不可分. 设 T_{m+1}与 U_m 可分，则存在 $\mathscr{L}'_0$ 的句子 $\theta(c, c_1, \cdots, c_n)$ 使

$$T_m \cup \{\varphi_m\} \cup \{\sigma(c)\} \vdash \theta(c, c_1, \cdots, c_n)$$

$$U_m \vdash \neg\theta(c, c_1, \cdots, c_n)$$

因此有 $T_m \cup \{\varphi_m\} \vdash \sigma(c) \rightarrow \theta(c, c_1, \cdots, c_n)$. 由于 c 不在 T_m，φ_m 及 U_m 中出现，由命题 2.2.2 和练习 2.2.1 有

$$T_m \cup \{\varphi_m\} \vdash \exists x\sigma(x) \rightarrow \exists x\theta(x, c_1, \cdots, c_n)$$

及
$$U_m \vdash \forall x \neg\theta(x, c_1, \cdots, c_n)$$

后式等价于 $U_m \vdash \neg\exists x\theta(x, c_1, \cdots, c_n)$，由 $\varphi_m = \exists x\sigma(x)$，前式等价于

$$T_m \cup \{\varphi_m\} \vdash \exists x\theta(x, c_1, \cdots, c_n).$$

这样便有 $T_m \cup \{\varphi_m\}$ 与 U_m 可分，得到矛盾！这就证明 T_{m+1}与 U_m 不可分。同理可证当 $\delta(d) \in U_{m+1}$时也有 T_{m+1}与 U_{m+1}不可分。这就归纳证明了 T_{m+1}，U_{m+1}满足（1）.

令 $T_\omega = \bigcup_{m<\omega} T_m$，$U_\omega = \bigcup_{m<\omega} U_m$，容易看出 T_ω 与 U_ω 也不可分，这样 T_ω，U_ω 都是和谐句子集。

我们进一步证明 T_ω，U_ω 分别是 $\mathscr{L}'_1$ 与 $\mathscr{L}'_2$ 的极大和谐句子集。

设 T_ω 不极大和谐，则存在 $\mathscr{L}'_1$ 的句子 φ_m，使 $\varphi_m \notin T_\omega$，$\neg\varphi_m \notin T_\omega$. 这时 $T_m \cup \{\varphi_m\}$ 与 U_m 必可分。这样存在 $\mathscr{L}'_0$ 的句子 θ，使 $T_m \cup \{\varphi_m\} \vdash \theta$，$U_m \vdash \neg\theta$. 前式等价于 $T_m \vdash \varphi_m \rightarrow \theta$. 总之有

$T_\omega \vdash \varphi_m \to \theta, U_\omega \vdash \neg\theta$. 同时又必有某 $n<\omega$，使 $\mathscr{L}'_1$ 中句子 $\varphi_n = \neg\varphi_n$. T_n 与 U_n 亦不可分。因此存在 $\mathscr{L}'_0$ 句子 θ' 使 $T_n \cup \{\varphi_n\} \vdash \theta'$，$U_n \vdash \neg\theta'$，前式等价于 $T_n \vdash \varphi_n \to \theta'$. 即 $T_n \vdash \neg\varphi_m \to \theta'$. 总之有 $T_\omega \vdash \neg\varphi_m \to \theta'$，$U_\omega \vdash \neg\theta'$.

合以上两种结果用练习 1.3.10 可得 $T_\omega \vdash \theta \vee \theta'$，$U_\omega \vdash \neg\theta \wedge \neg\theta'$. 但后者即 $U_\omega \vdash \neg(\theta \vee \theta')$，这样 T_ω 与 U_ω 可分。又得到矛盾！这说明 T_ω 极大和谐。同时 U_ω 也是极大和谐。

我们再证明 $T_\omega \cap U_\omega$ 是 $\mathscr{L}'_0$ 中极大和谐句子集。

对 $\mathscr{L}'_0$ 中任意句子 σ. 由 T_ω, U_ω 的极大和谐性知或 $\sigma \in T_\omega$，或 $\neg\sigma \in T_\omega$；或 $\neg\sigma \in U_\omega$ 或 $\sigma \in U_\omega$. 但由 T_ω 与 U_ω 的不可分性，不能有 $\sigma \in T_\omega$ 且 $\neg\sigma \in U_\omega$，也不能有 $\neg\sigma \in T_\omega$ 且 $\sigma \in U_\omega$. 这样只能 $\sigma \in T_\omega \cap U_\omega$ 或 $\neg\sigma \in T_\omega \cap U_\omega$. 这就说明 $T_\omega \cap U_\omega$ 是 $\mathscr{L}'_0$ 中极大和谐句子集。

令 $\mathscr{L}'_1$ 的模型 $\mathscr{B}'_1 \vdash T_\omega$，$\mathscr{B}'_1 = (\mathscr{B}_1, b_0, b_1, \cdots)$，其中 b_n 是 C 中常量 c_n 的解释. 由 T_ω 的构造 (3)，知由子集 $A_1 = \{b_0, b_1, \cdots\}$ 可以构造 $\mathscr{B}'_1$ 的子模型 $\mathscr{U}'_1 = (\mathscr{U}_1, b_0, b_1, \cdots)$，仍有 $\mathscr{U}'_1 \vdash T_\omega$.

同样有 $\mathscr{L}'_2$ 的模型 $\mathscr{B}'_2 \vdash U_\omega$，$\mathscr{B}'_2 = (\mathscr{B}_2, d_0, d_1, \cdots)$，其中 d_n 是 C 中常量 c_n 的解释。令 $A_2 = \{d_0, d_1, \cdots\}$，则 $\mathscr{U}'_2 = (\mathscr{U}_2, d_0, d_1 \cdots)$ 是 $\mathscr{B}'_2$ 的子模型，$\mathscr{U}'_2 \vdash U_\omega$.

这时，$\mathscr{U}'_1$，$\mathscr{U}'_2$ 的 $\mathscr{L}'_0$ 归约模型 $\mathscr{U}_1$，$\mathscr{U}_2$ 都是 $T_\omega \cap U_\omega$ 的模型. 由于 $T_\omega \cap U_\omega$ 极大和谐，有 $\mathscr{U}_1 \equiv \mathscr{U}_2$，又因为 $\mathscr{U}_1$，$\mathscr{U}_2$ 中每个元素都是常量的解释. 因此有 f: $\mathscr{U}_1 \cong \mathscr{U}_2$，对每个 $n<\omega$，$f(b_n) = d_n$. 不妨把 b_n，d_n 看作同一个元素，使 $\mathscr{U}_1$，$\mathscr{U}_2$ 看成同一个模型 $\mathscr{U}$. 我们可以由 $\mathscr{U}$ 得到 $\mathscr{L}'$ 膨胀模型 $\mathscr{U}'$，使 $\mathscr{U}'$ 的 $\mathscr{L}'_1$ 归约是 $\mathscr{U}'_1$，$\mathscr{L}'_2$ 归约是 $\mathscr{U}'_2$. 这样 $\mathscr{U} \models T_\omega \cup U_\omega$. 从而 $\mathscr{U} \models \varphi \wedge \neg\psi$，与题设 $\varphi \vdash \psi$ 矛盾。 ▌

我们给出内插定理应用的两个例子。

令 P，P' 是不在语言 $\mathscr{L}$ 中出现的新的 n 元关系符号，令 $\Sigma(P)$ 是膨胀语言 $\mathscr{L}\cup\{P\}$ 中句子集. $\Sigma(P')$ 是把 $\Sigma(P)$ 中每个句子中出现的所有的 P 都换成 P' 得到的句子集。称 $\Sigma(P)$ **隐定义** P，如果

(1) $\Sigma(P)\cup\Sigma(p')\vdash\forall x_1\cdots x_n(P(x_1\cdots x_n)\leftrightarrow P'(x_1\cdots x_n))$

设 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{L}$ 的模型，令 $(\mathscr{U},R)$ 是 $\mathscr{U}$ 在 $\mathscr{L}\cup\{P\}$ 中的膨胀模型，即在 $\mathscr{U}$ 中增加定义 A 上 n 元关系 R 作为 P 的解释。同样，令 $(\mathscr{U},R')$ 是 $\mathscr{U}$ 在 $\mathscr{L}\cup\{P'\}$ 中的膨胀模型。如果 $\Sigma(P)$ 隐定义 P，$(\mathscr{U},R)\models\Sigma(P)$，$(\mathscr{U},R')\models\Sigma(P')$，则
$(\mathscr{U},R,R')\models\Sigma(P)\cup\Sigma(P')$。由 (1) 有 $R=R'$，这样 $\Sigma(P)$ 隐定义 P 的语义解释是：如果 $(\mathscr{U},R)$，$(\mathscr{U},R')$ 都是 $\Sigma(P)$ 的模型，则 $R=R'$。换句话说，$\mathscr{L}$ 的模型 $\mathscr{U}$ 只有唯一的一种膨胀 $(\mathscr{U},R)$，使 $(\mathscr{U},R)\models\Sigma(P)$。

称 $\Sigma(P)$ **显定义** P，如果 $\mathscr{L}$ 中有公式 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 使

(2) $\Sigma(P)\vdash\forall x_1\cdots x_n(P(x_1\cdots x_n)\leftrightarrow\varphi(x_1\cdots x_n))$

显然，如果 $\Sigma(P)$ 显定义 P，则必有 $\Sigma(P)$ 隐定义 P，以下的定理说明反过来也对。

定理 7.3.2 (**Beth 定理**) $\Sigma(P)$ 隐定义 P 当且仅当 $\Sigma(P)$ 显定义 P。

证明 只要证明一个方向。设 $\Sigma(P)$ 隐定义 P，令 $\mathscr{L}'=\mathscr{L}\cup\{P,P',c_1,\cdots,c_n\}$，其中 $c_1,\cdots,c_n$ 是互不相同的新常量。由 (1) 有

$\Sigma(P)\cup\Sigma(P')\vdash P(c_1,\cdots,c_n)\rightarrow(P'(c_1,\cdots,c_n)$。

这样必有有限子集 $\Delta(P)\subset\Sigma(P)$，$\Delta(P')\subset\Sigma(P')$，使 $\Delta(P)\cup\Delta(P')\vdash P(c_1,\cdots,c_n)\rightarrow P'(c_1,\cdots c_n)$。令 $\psi(P)$ 是 $\Delta(P)$ 的合取，则 $\psi(P')$ 是 $\Delta(P')$ 的合取。这样有

$\psi(P)\wedge\psi(P')\vdash P(c_1,\cdots,c_n)\rightarrow P'(c_1,\cdots,c_n)$，

由演绎定理上式等价于

$$\psi(P)\wedge P(c_1,\cdots,c_n)\vdash\psi(P')\rightarrow P'(c_1,\cdots c_n)。$$

由 Craig 内插定理，存在 $\mathscr{L}\cup\{c_1, \cdots, c_n\}$ 的句子 $\theta(c_1, \cdots, c_n)$，$\theta(c_1, \cdots, c_n)$中不出现 P，P'，使

(3) $\psi(P)\wedge P(c_1,\cdots,c_n)\vdash\theta(c_1,\cdots,c_n)$

(4) $\theta(c_1,\cdots,c_n)\vdash\psi(P')\rightarrow P'(c_1,\cdots,c_n)$

由 (3) 可得

(5) $\psi(P)\vdash P(c_1,\cdots,c_n)\rightarrow\theta(c_1,\cdots,c_n)$

把(4)式中 P' 换成 P 可得 $\theta(c_1,\cdots,c_n)\vdash\psi(P)\rightarrow P(c_1,\cdots,c_n)$ 从而有

(6) $\psi(P)\vdash\theta(c_1,\cdots c_n)\rightarrow P(c_1,\cdots,c_n)$

合 (5)，(6) 两式得到 $\psi(P)\vdash P(c_1,\cdots,c_n)\leftrightarrow\theta(c_1,\cdots,c_n)$

由于 $c_1,\cdots,c_n$ 不在 $\psi(P)$中出现，又 $\psi(P)$是 $\Sigma(P)$的子集的合取式，因此

$\Sigma(P)\vdash\forall x_1,\cdots x_n(P(x_1,\cdots,x_n)\leftrightarrow\theta(x_1,\cdots,x_n))$

这样，$\Sigma(P)$显定义 P. ▌

定理 7.3.3 **(Robinson 和谐定理)** 设 $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2$ 是两个语言，$\mathscr{L}=\mathscr{L}_1\cap\mathscr{L}_2$，设 T_1，T_2 分别是 $\mathscr{L}_1$，$\mathscr{L}_2$ 的和谐理论，$T_1\cap T_2=T$ 是 $\mathscr{L}$ 的完全理论，则 $T_1\cup T_2$ 是 $\mathscr{L}_1\cup\mathscr{L}_2$ 的和谐理论。

证明 设 $T_1\cup T_2$ 不和谐，则必有有限子集 $\Sigma_1\subset T_1$，$\Sigma_2\subset T_2$，使 $\Sigma_1\cup\Sigma_2$ 不和谐。令 σ_1，σ_2 分别是 Σ_1，Σ_2 的合取，由 $\sigma_1\wedge\sigma_2$ 不和谐有 $\sigma_1\vdash\neg\sigma_2$，再由 Craig 内插定理存在 $\mathscr{L}$ 中句子 θ，使 $\sigma_1\vdash\theta,\theta\vdash\neg\sigma_2$，由后式有 $\sigma_2\vdash\neg\theta$，这样有 $T_1\vdash\theta$，$T_2\vdash\neg\theta$，由于 T_1 是和谐理论，因此 $T_1\nvdash\neg\theta$，同样由 T_2 和谐得 $T_2\nvdash\theta$。这样既不能有 $T_1\cap T_2\models\theta$，也不能有 $T_1\cap T_2\models\neg\theta$，从而与 $T_1\cap T_2=T$是 $\mathscr{L}$ 的完全理论矛盾！ ▌

Robinson 和谐定理中的假设 $T_1\cap T_2=T$ 是 $\mathscr{L}$ 的完全理论是不可缺少的。如果 T 不完全，则可以有句子 φ，使$T\cup\{\varphi\}$，$T\cup\{\neg\varphi\}$都和谐。而 $T\cup\{\varphi, \neg\varphi\}$ 显然是不和谐的。

事实上，由 Robinson 和谐定理也可以导出 Craig 内插定理。因此这两个定理是等价的。而用初等链定理可以直接证明 Robinson 和谐定理，有兴趣的读者可参阅 [MT].

内插定理还有更强的形式：

定理 7.3.4 (Lyndon 内插定理) 设语言 $\mathscr{L}$ 中不含函数符号和常量符号。如果 $\mathscr{L}$ 的句子 φ, ψ 有 $\varphi\vdash\psi$，则 $\mathscr{L}$ 中一定有句子 θ，使

(i) $\varphi\vdash\theta$, $\theta\vdash\psi$;

(ii) θ 中正出现的关系符号也在 φ,ψ 中都正出现，θ 中负出现的关系符号在 φ, ψ 中都有负出现。

定理中关系符号正或负出现是指一个关系符号在句子中出现于偶数个或奇数个$\neg$号的辖域内。等价地说当句子化成前束标准形时关系符号之前不带有$\neg$号的称为正出现，关系符号前面带有$\neg$号的称为负出现。

Lyndon 内插定理的证明与 Craig 内插定理的证明类似，读者可参阅王世强著《模型论基础》一书。

练习

7.3.1 设 T_1, T_2 是 $\mathscr{L}$ 的两个句子集，$T_1\cup T_2$ 不和谐，则存在 $\mathscr{L}$ 的句子 φ, φ 中出现的非逻辑符号在 T_1, T_2 中都有出现，且 $T_1\vdash\varphi$, $T_2\vdash\neg\varphi$。

7.3.2 设 T 是和谐理论，$T_1\supset T$, $T_2\supset T$, T_1, T_2 都是 T 的和谐扩充，举例说明 $T_1\cup T_2$ 不一定还是和谐理论。

7.3.3 证明 Craig 内插定理对公式 $\varphi(x_1\cdots x_n)$ 与 $\psi(x_1\cdots x_n)$ 也成立。

第八章　超积模型

集合论中，由两个集合 A、B 可以定义他们的乘积集合$A\times B$，由一个集合族 A_i，$i\in I$，可以定义他们的乘积$\prod\limits_{i\in I}A_i$。代数学中，同类的两个代数结构G_1，G_2 可以定义他们的直积 $G_1\times G_2$，同一类的代数结构族 G_i，$i\in I$，也可以定义直积$\prod\limits_{i\in I}G_i$。类似地，同一语言 $\mathscr{L}$ 的两个模型 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$，也可以定义直积模型 $\mathscr{U}\times\mathscr{B}$. $\mathscr{L}$ 的模型族 $\mathscr{U}_i$，$i\in I$，也可以定义直积$\prod\limits_{i\in I}\mathscr{U}_i$. 对 $\mathscr{L}$ 的任何一个句子 φ，$\mathscr{U}\times\mathscr{B}\models\varphi$当且仅当 $\mathscr{U}\models\varphi$ 且 $\mathscr{B}\models\varphi$，$\prod\limits_{i\in I}\mathscr{U}_i\models\varphi$ 当且仅当对任意 $i\in I$，$\mathscr{U}_i\models\varphi$. 这样直积模型的语义对应于构成直积的所有模型的语义。这就使直积模型在模型论中作用不大。直积模型的一种改进就是超积模型。超积模型的语义是在构成超积的模型族中的大多数模型中句子 φ 成立，φ 就在超积中成立。这样超积模型比直积模型的意义和作用要大得多。本章我们简单介绍超积模型的构造，和它的一些简单应用。

§8.1　超滤集

设 I 是任意一个非空集合，$S(I)=\{x: x\subseteq I\}$ 是 I 的幂集。I 的一些子集组成的集合 $D\subset S(I)$ 称为 I 的一个**滤子**，或 I 上的**滤集**，如果 D 满足下列三个条件：

(1) $I\in D$；

(2) 如果 X，$Y\in D$，则 $X\cap Y\in D$；

(3) 如果 $X\in D$，$X\subseteq Y\subseteq I$，则 $Y\in D$.

例如，$D=\{I\}$，即 D 中只有全集 I 本身。易见 D 满足 (1)、(2) 和 (3)，因此 D 是一个滤子。我们称这个滤集为 I 的**平凡的滤**。另一个特别的例子是 $D=S(I)$ 即 D 是 I 的幂集。称这个滤集为 I 的**非真滤**。I 上任意一个滤集 D，如果 $D\neq S(I)$，则称 D 为**真滤**。滤集 D 是真滤当且仅当 $\varnothing\notin D$。

设 I 是非空集，$Y\subseteq I$，令 $D=\{X: Y\subseteq X\subseteq I\}$. 则 D 满足 (1)，(2) 和 (3). 称 D 是由 Y **生成的主滤**。

例 1 设 I 是一个无限集，令 $D=\{X: X\subseteq I, I\setminus X \text{ 有限}\}$，则 D 是 I 的滤集，称 D 是 **Fréchet 滤**。

证明 (1) $I\setminus I=\varnothing$，空集是有限集，所以 $I\in D$.

(2) 设 X，$Y\in D$，即 $I\setminus X$，$I\setminus Y$ 都有限，则 $I\setminus(X\cap Y)=(I\setminus X)\cup(I\setminus Y)$ 仍有限，因此 $X\cap Y\in D$.

(3) 设 $X\in D$，即 $I\setminus X$ 有限，对任意子集 $Y\subseteq I$，如果 $X\subseteq Y$，则 $I\setminus Y\subseteq I\setminus X$，因此 $I\setminus Y$ 有限，这样 $Y\in D$.

由 (1)，(2) 和 (3) D 是 I 上滤集。 ▌

设 $E\subseteq S(I)$，即 E 是 I 的一些子集的集合，称 I 上的滤集 D 是由 E 生成的滤，如果 D 是所有包含 E 的 I 上滤集的交，即 $D=\bigcap\{F: E\subseteq F, F \text{ 是 } I \text{ 上滤集}\}$.

如果 I 的子集的集合 E 中有有限个集合的交是空集，则包含 E 的 I 上滤都是非真滤，因此 E 生成的滤是非真滤。

称 I 的子集的集合 E 有**有限交性质**，或称 E **保持有限交**，如果 E 中任意有限多个集合的交都非空。

命题 8.1.1 设 $E\subseteq S(I)$，$E\neq\varnothing$，D 是 E 生成的滤，则

(i) D 是 I 上滤集，$E\subseteq D$；

(ii) $D=\{X: X\in S(I), \text{存在 } Y_1,\cdots,Y_n\in E, Y_1\cap\cdots\cap Y_n\subseteq X\}$；

(iii) D 是真滤当且仅当 E 有有限交性质。

证明 (i) 只要证明 I 上任意多个滤集的交仍是 I 上滤集。我

们把证明留给读者。

(ii) 令 $D'=\{X: X\in S(I)$，存在 $Y_1, \cdots, Y_n\in E$，$Y_1\cap\cdots\cap Y_n\subseteq X\}$，则易见 $E\subseteq D'$，任取 $X, Y\in D'$，存在 $Y_1, \cdots, Y_n, Z_1, \cdots, Z_m\in E$，使 $Y_1\cap\cdots\cap Y_n\subseteq X$，$Z_1\cap\cdots\cap Z_m\subseteq Y$，则 $Y_1\cap\cdots\cap Y_n\cap Z_1\cap\cdots\cap Z_m\subseteq X\cap Y$，因此 $X\cap Y\in D'$，即 D' 满足性质 (2)，易见显然 D' 满足性质 (3)，由 E 非空，知存在 $Y\in E$ 自然有 $Y\subseteq I$，因此 $I\in D'$，D' 满足性质 (1)，这样 D' 是 I 上滤集。因此 $D'\supseteq\bigcap\{F: F\supset E, F$ 是 I 上滤$\}$，即 $D\subseteq D'$.

反之，设 $F\supset E$，F 是 I 上滤。则对任意 $Y_1, \cdots, Y_n\in E$，有 $Y_1, \cdots, Y_n\in F$，由性质 (2)，$Y_1\cap\cdots\cap Y_n\in F$，对任意 $X\in D'$，存在 $Y_1, \cdots, Y_n\in E$，使 $Y_1\cap\cdots\cap Y_n\subseteq X$，由性质 (3) 必有 $X\in F$. 这就是说 $D'\subseteq F$，因此有 $D'\subseteq\bigcap\{F: F\supset E, F$ 是 I 上滤$\}$，即 $D'\subseteq D$.

合以上两个结论就有 $D=D'$.

(iii) 设 D 是真滤，则 $\varnothing\notin D$，因此对任意 $Y_1, \cdots, Y_n\in E$，$Y_1\cap\cdots\cap Y_n\neq\varnothing$。即 E 有有限交性质。反之，若 E 有有限交性质，则 $\varnothing\notin D$. ▌

下面我们给出一个非常有用的例子。

例 2 令 J 是一个无限集，令 $I=S_\omega(J)$ 是 J 的所有有限子集的集合。对每个元素 $j\in J$，令 $\hat{j}=\{i\in I: j\in i\}$，即 $\hat{j}$ 是 J 的全体含元素 j 的有限子集的集合。令 $E=\{\hat{j}: \hat{j}\in J\}$，则 E 是 $S(I)$ 的子集，对任意 $\hat{j}_1, \cdots, \hat{j}_n\in E$，$\hat{j}_1\cap\cdots\cap\hat{j}_n=\{i\in I: j_1\in i\}\cap\cdots\cap\{i\in I: j_n\in i\}=\{i\in I: j_1, \cdots, j_n\in i\}\neq\varnothing$，因此 E 有有限交性质。这样 E 可以生成 I 上真滤 D. 事实上，

$D=\{X\subseteq I$: 存在 $\hat{j}_1\cdots, \hat{j}_n\in E$，$\hat{j}_1\cap\cdots\cap\hat{j}_n\subseteq X\}$，因此

$X\in D$，当且仅当存在 $j_1, \cdots, j_n\in J$，令：$i_0=\{j_1, \cdots, j_n\}$

$X\supseteq\{i\in I, i_0\subseteq i\}$，这里，$\{i\in I, i_0\subseteq i\}=\hat{j}_1\cap\cdots\cap\hat{j}_n$.

设 I 是非空集合，$D\subseteq S(I)$，称 D 是 I 上**超滤**，如果 D 是 I

上滤集且满足性质：

(4) 对任意 $X\in S(I)$，$X\in D$ 当且仅当 $I\backslash X\notin D$.

称 D 是 I 上**极大滤**，若 D 是真滤且 I 上不存在真包含 D 的真滤。有时称 D 是超滤而不说是集合 I 上的超滤，这时非空集合 $I=\bigcup D$ 可由 D 决定。

命题 8.1.2 D 是超滤当且仅当 D 是 I 上极大滤。

证明 ($\Rightarrow$) 设 D 是超滤，则 D 是滤，$I\in D$，由性质 (4) $I\backslash I=\varnothing\notin D$，因此 D 是真滤。再设有 I 上真滤 $D'\supseteq D$，如果有 $X\in D'$，$X\notin D$，则 $I\backslash X\in D$ 从而 $I\backslash X\in D'$. 这样 $X\cap(I\backslash X)=\varnothing\in D'$ 矛盾. 因此 $D=D'$ 是极大滤。

($\Leftarrow$) 设 D 是极大滤，则 D 是真滤。我们证明 D 满足性质 (4). 任取 $X\subset I$，如果 $I\backslash X\in D$，则必有 $X\notin D$，否则 $\varnothing=X\cap(I\backslash X)\in D$ 与 D 是真滤矛盾。如果 $I\backslash X\notin D$，则对任意 $Y\in D$，必有 $X\cap Y\neq\varnothing$.（否则如果 $X\cap Y=\varnothing$，则 $Y\subset I\backslash X$，因此有 $I\backslash X\in D$ 矛盾）。这样 $D\cup\{X\}$ 有有限交性质，因而能生成 I 上一个真滤 $D'\supseteq D\cup\{X\}$，由 D 是极大滤必有 $D=D'$，因此有 $X\in D$。这样 D 满足 (4)，因而 D 是超滤。 ▌

命题 8.1.3 **(超滤定理)** 若 $E\subset S(I)$，E 保持有限交，则存在 I 上超滤 D，$E\subseteq D$.

证明 列出 $S(I)$ 的全部元素 $X_1, X_2, \cdots, X_\beta, \cdots, \beta<\alpha$. 由 E 保持有限交知 E 可以生成 I 上真滤 $F\supset E$，我们构造 I 上真滤的递增链

$$F=F_0\subset F_1\subset\cdots\subset F_\beta\subset\cdots,\ \beta<\alpha,$$

使每个 $\beta<\alpha$，如果 $I\backslash X_\beta\notin F_\beta$，则 $X_\beta\in F_{\beta+1}$. 由 $I\backslash X_\beta\notin F_\beta$，及 F_β 是真滤可知 $F_\beta\cup\{X_\beta\}$ 保持有限交，因此可取 $F_{\beta+1}$ 为 $F_\beta\cup\{X_\beta\}$ 生成的真滤. 对极限序数 γ，可令 $F_\gamma=\bigcup_{\beta<\alpha}F_\beta$. 易证 F_γ 是 I 上真滤。令 $D=\bigcup_{\beta<\alpha}F_\beta$. 则 D 是 I 上真滤，且 $X\in D$ 当且仅当 $I\backslash X\notin D$，因此 D

是 I 上超滤。 ▌

推论 8.1.4 I 上任意一个真滤都可以扩充成为一个超滤。

证明 这是因为任何一个真滤都保持有限交。 ▌

设 $X\subseteq I$，由 $\{X\}$ 生成的超滤叫做**主超滤**. 任何一个真主滤都可以扩充成一个主超滤（见练习 8.1.4）. 但是，由 X 生成的主滤不一定能扩充成由 X 生成的主超滤。设 I 是一个无限集，$i\in I$，则 $\{i\}$ 可以生成一个主超滤 $D=\{X\subseteq I : i\in X\}$. 而对任意 i，$j\in I$，$i\neq j$，$\{i, j\}$ 不能生成主超滤。因为 $I\setminus\{i\}$ 和 $\{i\}$ 两者之中必有一个要属于超滤，而两者都不包含 $\{i, j\}$. 无限集 I 上的 Frèchet 滤扩充而成的超滤为 Frèchet 超滤. 易见 Frèchet 超滤不是主超滤，因为任何有限子集都不属于 Frèchet 超滤。这样我们得到如下命题。

命题 8.1.5 任何无限集 I 上都有非主超滤。 ▌

应用这个命题可以证明组合数学中著名的定理 Ramsey 定理。

定理 8.1.6 （**Ramsey 定理**） 设 I 是一个无限集，n 是个正整数，以 $[I]^n$ 记 I 的所有 n 元子集组成的集合。设 A_0 是 $[I]^n$ 的任意一个子集，$A_1=[I]^n\setminus A_0$，即 $[I]^n\subset A_0\cup A_1$，$A_0\cap A_1=\varnothing$。则存在 I 的无限子集 J，使 $[J]^n\subset A_0$ 或 $[J]^n\subset A_1$.

证明 不防设 I 是可数无限集，否则可以取 I 的一个可数子集 I' 来证明定理正确。我们对 n 作归纳证明。当 $n=1$ 时定理是显然的。设 $n>1$，先把 I 良序化，并排成一列：

$i_0<i_1<\cdots<i_m<\cdots$，$m<\omega$

设 D 是 I 上的任意一个非主超滤，比如是由 I 上 Frèchet 滤生成的超滤. 易见对每个 $m<\omega$，$\{i\in I : i_m<i\}\in D$

设 $\gamma<n$，对 γ 归纳定义 $[I]^{n-\gamma}$ 的两个子集 $A_0^{n-\gamma}$ 和 $A_1^{n-\gamma}$. 当 $\gamma=0$ 时，令 $A_0^n=A_0$，$A_1^n=A_1$，由题设有 $[I]^n\subseteq A_0^n\cup A_1^n$，设 $A_0^{n-\gamma}$，$A_1^{n-\gamma}$ 已定义并且满足 $[I]^{n-\gamma}\subseteq A_0^{n-\gamma}\cup A_1^{n-\gamma}$. 令

$A_0^{n-\gamma-1}=\{y_1<\cdots<y_{n-\gamma-1}:\{i\in I: y_{n-\gamma-1}<i$ 且 $\{y_1\cdots y_{n-\gamma-1}i\}\in A_0^{n-\gamma}\}\in D\}$

$A_1^{n-\gamma-1}=\{y_1<\cdots<y_{n-\gamma-1}:\{i\in I: y_{n-\gamma-1}<i$ 且 $\{y_1\cdots y_{n-\gamma-1}i\}\in A_1^{n-\gamma}\}\in D\}$

我们证明 $[I]^{n-\gamma-1}\subseteq A_0^{n-\gamma-1}\cup A_1^{n-\gamma-1}$，$A_0^{n-r-1}\cap A_1^{n-r-1}=\varnothing$。

设 $y_1<\cdots<y_{n-\gamma-1}$ 是 I 中任意 $n-\gamma-1$ 元，对任意 $i\in I$，如果 $y_{n-\gamma-1}<i$，有 $\{y_1\cdots y_{n-\gamma-1}i\}\in[I]^{n-\gamma}$，由归纳假设有 $\{y_1\cdots y_{n-\gamma-1}i\}\in A_0^{n-\gamma}$ 或 $\{y_1\cdots y_{n-\gamma-1}i\}\in A_1^{n-\gamma}$. 令 $X=\{i\in I: y_{n-\gamma-1}<i$ 且 $\{y_1\cdots y_{n-\gamma-1}i\}\in A_0^{n-\gamma}\}$，
$Y=\{i\in I: y_{n-\gamma-1}<i$ 且 $\{y_1\cdots y_{n-\gamma-1}i\}\in A_1^{n-\gamma}\}$，
则 $X\cup Y\supset\{i\in I: y_{n-\gamma-1}<i\}$. 由于 $\{i\in I: y_{n-\gamma-1}<i\}\in D$，$X\cup Y\subset D$. 由 D 是主超滤，必有 $X\in D$ 或 $Y\in D$.（见练习 8.1.3）. 这样就有 $\{y_1\cdots,y_{n-\gamma-1}\}\in A_0^{n-\gamma-1}$，或 $\{y_1\cdots,y_{n-\gamma-1}\}\in A_1^{n-\gamma-1}$，从而有 $[I]^{n-\gamma-1}\subseteq A_0^{n-r-1}\cup A_1^{n-\gamma-1}$. 归纳构造可行. 经 n 步后便得到 A_0^1，A_1^1 适合 $I\subset A_0^1\cup A_1^1$. 再由 D 是超滤，$A_0^1\in D$ 或 $A_1^1\in D$。由 $A_0^{n-r}\cap A_1^{n-r}=\varnothing$，易证 $A_0^{n-r-1}\cap A_1^{n-r-1}=\varnothing$。

先设 $A_0^1\in D$，在 I 中归纳地选择一个子序列：

$j_0<j_1<\cdots<j_m<\cdots$

第一步取 $j_0\in A_0^1$，再设 $j_0<\cdots<j_m$ 已选好并且适合

$(1)_m$ 对任意 γ，$1\leqslant\gamma\leqslant n$，$\{j_0\cdots j_m\}$ 中任意 γ 个元的子序列 $y_1<\cdots<y_n$ 都有 $\{y_1<\cdots<y_\gamma\}\in A_0^\gamma$.

现在来选取 j_{m+1}. 对任意 γ，对 $\{j_1,\cdots,j_m\}$ 中任意一个 γ 元子序列 $y_1,\cdots,y_\gamma$. 令 $X_{y_1\cdots y_\gamma}=\{i\in I: y_\gamma<i$ 且 $\{y_1\cdots y_\gamma i\}\in A_0^{\gamma+1}\}$. 由 $(1)_m\{y_1,\cdots,y_\gamma\}\in A_0^\gamma$ 及 A_0^γ 的构造知 $Xy_1\cdots y_\gamma\in D$，而 $\{j_0\cdots j_m\}$ 是有限集，它的所有子序列 $y_1,\cdots,y_\gamma$ 至多只有有限多个。因此如上定义的 $Xy_1\cdots y_\gamma$ 也只有有限多个. 令 Y 是所有 $Xy_1\cdots y_\gamma$ 的交，由 D 是滤集，知有限交 $Y\in D$，由于 D 是非主超滤，Y 必是无限集，

因此存在一个元素定义为 $j_{m+1}\in Y$，使 $j_m<j_{m+1}$. 由 Y 的构造可知对 $\{j_0,\cdots,j_{m+1}\}$ 仍有 $(1)_{m+1}$成立。

令 $J=\{j_0,\cdots,j_m,\cdots\}$. J 中任意 n 个元素的子序列 $y_1<\cdots<y_n$，必有 $\{y_1,\cdots,y_n\}\in A_0^n=A_0$，这就是 $[J]^n\subset A_0$.

如果 $A_1^1\in D$，则同样可以选取 J，使 $[J]^n\subset A_1$. ▌

Ramsey 定理有许多应用。本书 §11.2 中也有它的一个应用。

练习

8.1.1 证明 I 上任意两个滤集的交仍是 I 上滤集。

8.1.2 设 D_β，$\beta<\alpha$，是 I 上真滤集的递增链，证明 $\bigcup\limits_{\beta<\alpha}D_\beta$ 也是 I 上真滤集。

8.1.3 设 D 是 I 上真滤集，证明 D 是 I 上超滤当且仅当对任意 X，$Y\subset I$，$X\cup Y\in D$ 当且仅当 $X\in D$ 或 $Y\in D$.

8.1.4 设 I 非空，$i\in I$，$D=\{X\subset I: i\in X\}$，证明 D 是 I 上主超滤. 由此证明任何一个真主滤都可扩充为主超滤。

8.1.5 设 I 无限，D 是 I 上主超滤，证明存在 $i\in I$，使 $D=\{X\subset I: i\in X\}$，即 D 是由 $\{i\}$ 生成的主超滤。

8.1.6 设 I 无限，D 是 I 上任一非主超滤，X 是 D 中任一元，证明 X 是无限集。

8.1.7 设 I 是有限集，D 是 I 上真滤，则 D 是 I 的主滤。

8.1.8 设 x，$y\in I$，x，y 是 I 上不相同的两个元素，证明存在 I 上超滤 D，使 $\{x\}\in D$，$\{y\}\notin D$.

§8.2 超积模型

设 $\mathscr{U}_i$，$i\in I$，是一阶语言 $\mathscr{L}$ 的一个模型族，I 是非空指标集.

这个模型族的论域组成一个非空集族 $\{A_i: i\in I\}$. 令 $A=\prod_{i\in I}A_i$ 是集族的**卡氏积**. A 中每个元素都是一个函数 f，f 以 I 为定义域，对每个 $i\in I$，$f(i)\in A_i$，记 $f=\langle f(i): i\in I\rangle$.

当 I 只有两个元素时，令 $I=\{0, 1\}$，模型族只有两个模型，可以记 $\mathscr{U}_0=\mathscr{U}$，$\mathscr{U}_1=\mathscr{B}$，论域族的卡氏积就是普通乘积集合 $A\times B$. $A\times B$ 中每个元素 $f=\langle a, b\rangle$，叫做 a，b 的**序对**，即 $f(0)=a\in A$，$f(1)=b\in B$.

当 I 是可数集时，可以设 $I=\{0, 1, 2, \cdots\}$.
$\prod_{i\in I}A_i=A_0\times A_1\times A_2\times\cdots$，其中元素 $f=\langle a_0, a_1, a_2, \cdots\rangle$，即对每个 $i\in I$，$f(i)=a_i\in A_i$.

设 $f_1, f_2\in A=\prod_{i\in I}A_i$，由卡氏积的定义，$f_1=f_2$ 当且仅当对任意 $i\in I$，$f_1(i)=f_2(i)$. 即 f_1，f_2 的每个分量都相等时才认为 $f_1=f_2$.

集族的直积可以推广到模型族的**直积**，令 $\mathscr{U}=\prod_{i\in I}\mathscr{U}_i$. $\mathscr{U}$ 以 $A=\prod_{i\in I}A_i$ 为论域. $\mathscr{U}$ 中关系，函数、常量定义如下：

（1）设 R 是 $\mathscr{L}$ 的 n 元关系符号，$f_1, \cdots, f_n\in A$，$R^{\mathscr{U}}(f_1\cdots f_n)$ 成立当且仅当对每个 $i\in I$，$R^{\mathscr{U}_i}(f_1(i), \cdots, f_n(i))$ 成立；

（2）设 F 是 $\mathscr{L}$ 的 m 元函数符号，$f_1, \cdots, f_m\in A$，
$F^{\mathscr{U}}(f_1\cdots f_m)=\langle F^{\mathscr{U}_i}(f_1(i)\cdots f_m(i)): i\in I\rangle$；

（3）设 c 是 $\mathscr{L}$ 的常量符号，$f\in A$，f 是 c 在 $\mathscr{U}$ 中的解释即 $f=c^{\mathscr{U}}$ 当且仅当对每个 $i\in I$，$f(i)=c^{\mathscr{U}_i}$.

这个定义的意义是明显的，即 $\mathscr{U}$ 中 n 个元素 $f_1\cdots f_n$ 满足关系 $R^{\mathscr{U}}$ 当且仅当每个分量 $i\in I$，$f_1(i), \cdots, f_n(i)$ 在 $\mathscr{U}_i$ 中都满足关系 $R^{\mathscr{U}_i}$，函数 $F^{\mathscr{U}}(f_1\cdots f_m)$ 的每个分量都是 $F^{\mathscr{U}_i}(f_1(i)\cdots f_m(i))$；而常量 $c^{\mathscr{U}}=\langle c^{\mathscr{U}_i}: i\in I\rangle$. 对公式 $\varphi(x_1\cdots x_n)$ 的复杂性不难验证，对任意 n 个元素 $f_1, \cdots, f_n\in A$，

$\mathscr{U}\models\varphi[f_1\cdots f_n]$ 当且仅当对每个 $i\in I$，

$\mathscr{U}_i\models\varphi[f_1(i),\cdots,f_n(i)]$.

这样对每个句子 φ，$\mathscr{U}\models\varphi$ 当且仅当对每个 $i\in I$，$\mathscr{U}_i\models\varphi$.

对直积模型 $\mathscr{U}=\prod_{i\in I}\mathscr{U}_i$ 的上述性质，我们不能感到满意。$\mathscr{U}$ 满足一个句子必须是每个 $\mathscr{U}_i$ 都满足的，只要有一个 $i\in I$，$\mathscr{U}_i$ 不满足句子 φ，就使 $\mathscr{U}$ 不满足 φ. 这就极大地限制了直积模型的意义。我们希望构造这样的模型 $\mathscr{U}$，只要在多数 $\mathscr{U}_i$ 中满足的句子，在 $\mathscr{U}$ 中就满足，而不问是否有少数 $\mathscr{U}_i$ 不满足 φ，为此我们先要对直积集合加以改进，使 A 中元素 f_1，f_2，$f_1=f_2$ 当且仅当它们的大多数分量相等，而不论是否有少数分量不等。下面把子集 $X\subset I$，$X\in D$，D 是滤集或超滤集，认为 X 是 I 中的大多数.

设 D 是非空指标集 I 上的滤集，我们定义 $A=\prod_{i\in I}A_i$ 上二元关系 $=_D$ 如下：对任意 f，$g\in A$，

$f=_Dg$ 当且仅当 $\{i\in I: f(i)=g(i)\}\in D$. 可以证明 $=_D$ 是 A 上等价关系. 对任意 $f\in A$，$\{i\in I: f(i)=f(i)\}=I\in D$，因此 $f=_Df$，满足自反性. 设 f，g，$h\in A$，如果 $f=_Dg$，$g=_Dh$，令 $X=\{i\in I: f(i)=g(i)\}$，$Y=\{i\in I: g(i)=h(i)\}$，则 X、$Y\in D$. 由于 D 是 I 上滤集，$X\cap Y\in D$，因此
$X\cap Y\subset\{i\in I: f(i)=h(i)\}\in D$，这样有 $f=_Dh$，满足传递性。对称性是显然的。

令 $f_D=\{g\in A: f=_Dg\}$ 是 f 所在的等价类，记 $\prod_D A_i=\{f_D: f\in\prod_{i\in I}A_i\}$，$\prod_D A_i$ 是 A 上全体等价类的集合。称 $\prod_D A_i$ 是非空集族 $\{A_i: i\in I\}$ 模滤集 D 的**归约积**。如果 D 是 I 上超滤，则称 $\prod_D A_i$ 为 $\{A_i: i\in I\}$ 模 D 的**超积**。

以下我们以 $\prod_D A_i$ 为论域定义 $\mathscr{L}$ 的模型。

(1) 设 R 是语言 $\mathscr{L}$ 中 n 元关系符号，对任意 $i\in I$，R 在模型 $\mathscr{U}_i$ 中的解释为 R_i，任取 f_D^1，…，$f_D^n\in\prod_D A_i$，定义：

$R(f_D^1, \cdots, f_D^n)$ 成立当且仅当
$\{i\in I: R_i(f^1(i),\cdots,f^n(i)$成立$\}\in D$;

(2) 设 F 是 $\mathscr{L}$ 中 m 元函数符号，对任意 $i\in I$，F 在 $\mathscr{U}_i$ 中解释是 F_i，任取 f_D^1; …，$f_D^m\in \prod_D A_i$，定义：

$F(f_D^1,\cdots,f_D^m)=\langle F_i(f^1(i),\cdots,f^m(i)):i\in I\rangle_D\in \prod_D A_i$

(3) 设 c 是 $\mathscr{L}$ 的常量符号，对任意 $i\in I$，c 在 $\mathscr{U}_i$ 中解释是 c_i，$c_i\in A_i$. 定义 c 的解释为 $C^{\mathscr{U}}=\langle c_i: i\in I\rangle_D\in \prod_D A_i$

我们还需要证明以上定义都与代表元取法无关。设 f、$g\in A$，令

$\| f=g \| =\{i\in I:f(i)=g(i)\}$

设 R 是 $\mathscr{L}$ 的 n 元关系符号，f_1，…，$f_n\in A$，令

$\| R(f_1,\cdots,f_n)\| =$ $\{i\in I$: $R_i(f_1(i),\cdots,f_n(i))$ 在 $\mathscr{U}_i$ 中成立$\}$

设 F 是 $\mathscr{L}$ 的 m 元关系符号，f，f_1，…，$f_m\in A$，令
$\| F(f_1,\cdots,f_m)=f \| =\{i\in I$: $\mathscr{U}_i$中$F_i(f_1(i),\cdots,f_m(i))=f(i)\}$.
其中 R_i，F_i 分别是 R，F 在 $\mathscr{U}_i$ 中的解释。

设 f_1，…，f_n，g_1，…，$g_n\in A$，$f_1=_D g_1$，…，$f_n=_D g_n$，则 $\| f_1=g_1 \|$，…，$\| f_n=g_n \| \in D$，如果定义 (1) 中$R(f'_D$，…，$f_D^n)$ 成立，则 $\| R(f_1,\cdots,f_n)\| \in D$，但我们有
$\| R(f_1,\cdots,f_n)\| \cap \| f_1=g_1\| \cap\cdots\cap \| f_n=g_n \| \subseteq \| R(g_1,\cdots,g_n)\|$。由 D 是 I 上滤集，$\| R(g_1,\cdots,g_n)\| \in D$，因此 $R(g_D^1$，…，$g_D^n)$ 也成立。反过来也一样，从而 $R(f_D^1$，…，$f_D^n)$ 成立当且仅当 $R(g_D^1$，…，$g_D^n)$ 成立。

设 F 是 $\mathscr{L}$ 的 m 元函数符号，$f_1,\cdots,f_m,g_1,\cdots g_m\in A$，$f_1=_D g_1,\cdots,f_m=_D g_m$. 令 $f=\langle F_i(f_1(i),\cdots,f_m(i)):i\in I\rangle$ $g=\langle F_i(g_1(i),\cdots,g_m(i)):i\in I\rangle$. 由定义 (2)，$F(f_D^1,\cdots,f_D^m)=f_D$，$F(g_D^1,\cdots,g_D^m)=g_D$. 但我们有 $\| f_1=g_1 \|,\cdots,\| f_m=g_m \| \in D$.

$\| f=g \| = \{i \in I\} : F_i(f_1(i), \cdots, f_m(i)) = F_i(g_1(i), \cdots, g_m(i))\}$，因此 $\| f=g \| \supseteq \| f_1 = g_1 \| \cap \cdots \cap \| f_m = g_m \| \in D$. 这样，$\| f=g \| \in D$，因此 $f =_D g$，即 $f_D = g_D$，从而 $F(f_D^1, \cdots, f_D^m) = F(g_D^1, \cdots, g_D^m)$

这就证明以上（1），（2）定义与代表之选取无关，定义（3）也同样。因此定义是可行的. 这样以 $\prod_D A_i$ 为论域构成立了 $\mathscr{L}$ 的模型。记这个模型为 $\prod_D \mathscr{U}_i$. 若 D 是 I 上滤集，称 $\prod_D \mathscr{U}_i$ 为模型族 $\mathscr{U}_i$，$i \in I$ 的**归约积模型**，简称**归约积**. 若 D 是 I 上超滤，就称 $\prod_D \mathscr{U}_i$ 为模型族 $\mathscr{U}_i$，$i \in I$ 的**超积模型**，简称**超积**。

设 $\mathscr{U}_i$，$i \in I$，是 $\mathscr{L}$ 的模型族，$\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 是 $\mathscr{L}$ 的公式，我们归纳定义公式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 对卡氏积 $\prod_{i \in I} A_i$ 中元素 $f_1, \cdots, f_n$ 的赋值 $\| \varphi(f_1, \cdots, f_n) \| \subseteq I$：

若 φ 是原子公式 $t_1(x_1, \cdots, x_n) \equiv t_2(x_1, \cdots, x_n)$，令

$\| t_1(f_1, \cdots, f_n) \equiv t_2(f_1, \cdots, f_n) \|$

$= \{i \in I : \mathscr{U}_i \models t_1 \equiv t_2 [f_1(i), \cdots, f_n(i)]\}$.

若 φ 是原子公式 $R(x_1, \cdots, x_n)$，其中 R 是 $\mathscr{L}$ 的 n 元关系符号，令

$\| R(f_1, \cdots, f_n) \| = \{i \in I : \mathscr{U}_i \models R[f_1(i), \cdots, f_n(i)]\}$.

若 $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2 \ (x_1, \cdots, x_n)$. 令

$\| \varphi(f_1, \cdots, f_n) \| = \| \psi_1(f_1, \cdots, f_n) \| \cap \| \psi_2(f_1, \cdots, f_n) \|$.

若 $\varphi = \neg \psi \ (x_1, \cdots, x_n)$ 则令

$\| \varphi(f_1, \cdots, f_n) \| = I \setminus \| \psi(f_1, \cdots, f_n) \|$.

若 $\varphi = \exists x \psi(x, x_1, \cdots, x_n)$，令

$\| \varphi(f_1, \cdots, f_n) \| = \bigcup_{f \in \prod_{i \in I} A_i} \| \psi(f, f_1, \cdots, f_n) \|$.

命题 8.2.1 设 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 是 $\mathscr{L}$ 中任意公式，$f_1, \cdots, f_n \in \prod_{i \in I} A_i$，则

$\| \varphi(f_1,\cdots,f_n) \| = \{i\in I: \mathscr{U}_i \models \varphi[f_1(i),\cdots,f_n(i)]\}.$

证明 当φ是原子公式时由赋值定义知结论成立。对$\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2(x_1, \cdots, x_n)$及$\varphi = \neg\psi(x_1, \cdots, x_n)$也容易由定义推出结论成立。对$\varphi = \exists x\psi(x, x_1, \cdots, x_n)$的情况，

$\| \varphi(f_1,\cdots,f_n) \| = \| \exists x\psi(xf_1,\cdots,f_n) \| = \bigcup_{f\in\prod_{i\in I}A_i} \| \psi(f,f_1,\cdots,f_n) \| = \bigcup_{f\in\prod_{i\in I}A_i} \{i\in I: \mathscr{U}_i \models \psi[f(i),f_1(i),\cdots,f_n(i)]\}$

令$\{i\in I: \mathscr{U}_i \models \psi[f(i), f_1(i), \cdots, f_n(i)]\} = X_f$，$f\in \prod_{i\in I} A_i$，$\{i\in I: \mathscr{U}_i \models \exists x\psi[f_1(i), \cdots, f_n(i)]\} = Y$. 易见对每个$f\in\prod_{i\in I}A_i$，$X_f \subseteq Y$. 因此$\bigcup_{f\in\prod_{i\in I}A_i} X_f \subseteq Y$，即$\| \varphi(f_1, \cdots, f_n) \| \subseteq Y$. 反之对每个$i\in Y$，有$\mathscr{U}_i \models \exists x\psi[f_1(i), \cdots, f_n(i)]$. 因此存在$a\in A_i$，使$\mathscr{U}_i \models \psi[a, f_1(i), \cdots, f_n(i)]$. 令$f: I\rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i$是一个映射，使$f(i) = a\in A_i$，而对每个$j\in I$，$j\neq i$，有$f(j)\in A_j$，$f(j)$是$A_j$中任意一个元素。这样有$f\in\prod_{i\in I}A_i$。易见$i\in X_f$. 因此$Y\subseteq \bigcup_{f\in\prod_{i\in I}} X_f$. 合以上两个方向得到$\bigcup_{f\in\prod_{i\in I}A_i} X_f = Y$，从而$\| \varphi[f_1,\cdots,f_n) \| = Y$，即

$\| \varphi(f_1,\cdots,f_n) \| = \{i\in I: \mathscr{U}_i \models \varphi[f_1(i),\cdots,f_n(i)]\}.$ ▌

引理 8.2.2 设$\varphi(x, x_1, \cdots, x_n)$是$\mathscr{L}$的公式，$f$，$g$，$f_1$，$\cdots$，$f_n$，$g_1$，$\cdots$，$g_n$都是$\prod_{i\in I}A_i$中元素，则

(1) $\| f=g \| \cap \| \varphi(f,f_1,\cdots,f_n) \| \subseteq \| \varphi(g,f_1,\cdots,f_n) \|$；

(2) $\| f=g \| \cap \| f_1=g_1 \| \cap\cdots\cap \| f_n=g_n \| \cap \| \varphi(f,f_1,\cdots,f_n) \| \subseteq \| \varphi(g,g_1,\cdots,g_n) \|$.

证明 易见 (2) 是 (1) 的推论，我们证明 (1)。设 $i\in \| f=g \| \cap \| \varphi(f, f_1, \cdots, f_n) \|$，则$f(i) \equiv g(i)$且$\mathscr{U}_i \models \varphi[f(i),f_1(i),\cdots,f_n(i)]$. 因此有

$\mathscr{U}_i \models \varphi[g(i),f_1(i),\cdots,f_n(i)]$，从而$i\in \| \varphi[g,f_1,\cdots,f_n] \|$. 这样

(1) 成立。 ▌

引理 8.2.3 设 $\varphi(x, x_1, \cdots, x_n)$ 是 $\mathscr{L}$ 的一个公式，$f_1, \cdots, f_n \in \prod_{i\in I} A_i$ 则必存在 $f \in \prod_{i\in I} A_i$，使

$$\| \exists x\varphi(x, f_1, \cdots, f_n) \| = \| \varphi[f, f_1, \cdots, f_n] \|.$$

证明 为了简洁，我们只就 $\varphi(x)$ 的情形来证明。对 $\varphi(x, x_1, \cdots, x_n)$的情形完全类似可以证明。

对每个 $i\in I$，若 $\mathscr{U}_i \models \exists x\varphi(x)$，选取 $a_i \in A_i$，使 $\mathscr{U}_i \models \varphi[a_i]$. 若 $\mathscr{U}_i \not\models \exists x\varphi(x)$，任取 $a_i \in A_i$，我们定义 $f \in \prod_{i\in I} A_i$，使对每个 $i\in I$，$f(i) = a_i \in A_i$. 现在证明 $\| \exists x\varphi(x) \| = \| \varphi(f) \|$.

设 $i \in \| \exists x\varphi(x) \|$，即 $\mathscr{U}_i \models \exists x\varphi(x)$，这时有 $\mathscr{U}_i \models \varphi[a_i]$，即 $\mathscr{U}_i \models \varphi[f(i)]$，因此 $i \in \| \varphi(f) \|$. 从而 $\| \exists x\varphi(x) \| \subseteq \| \varphi(f) \|$.

反之设 $i \in \| \varphi(f) \|$，则 $\mathscr{U}_i \models \varphi[f(i)]$，$\mathscr{U}_i \models \varphi[a_i]$. 因此有 $\mathscr{U}_i \models \exists x\varphi(x)$. 这样 $i \in \| \exists x\varphi(x) \|$，从而
$\| \varphi(f) \| \subseteq \| \exists x\varphi(x) \|$.

合以上两者有 $\| \exists x\varphi(x) \| = \| \varphi(f) \|$. ▌

现在我们可以证明超积基本定理。

定理 8.2.4 **(超积基本定理)** 设 $\mathscr{U}_i$，$i\in I$，是 $\mathscr{L}$ 的模型族，D 是 I 上超滤，$\mathscr{B} = \prod_D \mathscr{U}_i$ 是超积模型，则：

(1) 对 $\mathscr{L}$ 中任意项 $t(x_1, \cdots, x_n)$，对任意 $f_D^1, \cdots, f_D^n \in B$，$t^{\mathscr{B}}(f_D^1, \cdots, f_D^n) = \langle t_0^{\mathscr{U}_i}(f_1(i), \cdots, f_n(i)) : i\in I \rangle_D$.

(2) 对 $\mathscr{L}$ 中任意原子公式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$，对任意 $f_D^1, \cdots, f_D^n \in B$.

$\mathscr{B} \models \varphi[f_D^1, \cdots, f_D^n]$ 当且仅当 $\| \varphi(f_1, \cdots, f_n) \| \in D$.

(3) 对任意公式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$，任意 $f_D^1, \cdots, f_D^n \in B$，$\mathscr{B} \models \varphi[f_D^1, \cdots, f_D^n]$当且仅当 $\| \varphi(f_1, \cdots, f_n) \| \in D$.

(4) 对 $\mathscr{L}$ 中任意句子 φ，

$\mathscr{B} \models \varphi$ 当且仅当 $\| \varphi \| \in D$ 当且仅当 $\{i\in I : \mathscr{U}_i \models \varphi\} \in D$.

证明 (1) 若$t(x_1, \cdots, x_n)=F(x_1, \cdots, x_n)$由超积模型定义有$F(f_D^1, \cdots, f_D^n)=\langle F_i(f_1(i), \cdots, f_n(i)): i\in I\rangle_D$.

若$t(x_1, \cdots, x_n)=F(t_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, t_m(x_1, \cdots, x_n))$归纳假设$t_1^{\mathscr{B}}(f_D^1, \cdots, f_D^n)=\langle t_1^{\mathscr{U}_i}(f_1(i), \cdots, f_n(i)):i\in I\rangle_D=g_D^1$, $\cdots, t_m^{\mathscr{B}}(f_D^1,\cdots,f_D^n)=\langle t_m^{\mathscr{U}_i}(f_1(i),\cdots,f_n(i)):i\in I\rangle_D=g_D^m$,则$t^{\mathscr{B}}(f_D^1, \cdots,f_D^n)=F(t_1^{\mathscr{B}}(f_D^1,\cdots,f_D^n),\cdots,t_m^{\mathscr{B}}(f_D^1,\cdots,f_D^n))=F(g_D^1,\cdots,g_D^m)$

$=\langle F_i(t_1^{\mathscr{U}_i}(f_1(i),\cdots,f_n(i)),\cdots,t_m^{\mathscr{U}_i}(f_1(i),\cdots,f_n(i))):i\in I\rangle_D$

$=\langle t_n^{\mathscr{U}_i}(f_1(i),\cdots,f_n(i)):i\in I\rangle_D$.

这就证明了 (1) 成立。

(2) 设φ是原子公式$t_1(x_1, \cdots, x_n)\equiv t_2(x_1, \cdots, x_n)$, $\mathscr{B}\models t_1\equiv t_2\ [f_D^1, \cdots, f_D^n]$当且仅当

$t_1^{\mathscr{B}}(f_D^1, \cdots, f_D^n)=_D t_2^{\mathscr{B}}(f_D^1, \cdots, f_D^n)$。由 (1) 当且仅当

$\langle t_1^{\mathscr{U}_i}(f_1(i),\cdots,f_n(i)):i\in I\rangle=_D\langle t_2^{\mathscr{U}_i}(f_1(i),\cdots,f_n(i)):i\in I\rangle$当且仅当$\{i\in I:t_1^{\mathscr{U}_i}(f_1(i),\cdots,f_n(i))\}=t_2^{\mathscr{U}_i}(f_1(i),\cdots,f_n(i)\}\in D$,而后者即$\| t_1(f_1,\cdots,f_n)=t_2(f_1,\cdots,f_n)\| \in D$。

设φ是原子公式$R(t_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,t_m(x_1,\cdots,x_n))$,设$t_1^{\mathscr{B}}(f_D^1,\cdots,f_D^n)=g_D^1,\cdots,t_m^{\mathscr{B}}(f_D^1,\cdots,f_D^n)=g_D^m$。由 (1) 有

$\| t_1(f_1,\cdots,f_n)=g_1 \| ,\cdots, \| t_m(f_1,\cdots,f_n)=g_m \| \in D$。这样

$\mathscr{B}\models R(t_1(f_D^1,\cdots,f_D^n),\cdots,t_m(f_D^1,\cdots,f_D^n))$当且仅当

$\mathscr{B}\models R(g_D^1,\cdots,g_D^m)$当且仅当$\| R(g_1,\cdots,g_m) \| \in D$。

由引理 8.2.2 $\| R(t_1(f_1,\cdots,f_n),\cdots,t_m(f_1,\cdots,f_n)) \| \supseteq \|R(g_1,\cdots,g_m)\|\cap\| g_1=t_1\|\cap\cdots\cap\| g_m=t_m \|$及$\| R(g_1,\cdots,g_m) \| \supseteq \| R(t_1(f_1,\cdots,f_n),\cdots,t_m(f_1,\cdots,f_n)) \| \cap \| t_1=g_1 \| \cap \cdots \cap \| t_m=g_m \|$知$\| R(g_1\cdots g_m) \| \in D$当且仅当$\| R(t_1(f_1,\cdots,f_n),\cdots, t_m(f_1\cdots f_n)) \| \in D$从而证明结论 (2) 成立。

(3) 对原子公式的情况 (2) 已证明。设$\varphi=\psi_1\wedge\psi_2\ (x_1\cdots x_n)$. $\mathscr{B}\models\varphi\ [f_D^1, \cdots, f_D^n]$ 当且仅当 $\mathscr{B}\models\psi_1\ [f_D^1, \cdots, f_D^n]$ 且

$\mathscr{B}\models\psi_2[f_D^1,\cdots,f_D^n]$，由归纳假设当且仅当 $\|\psi_1(f_1,\cdots,f_n)\|\in D$ 且 $\|\psi_2(f_1,\cdots,f_n)\|\in D$. 当且仅当 $\|\psi_1(f_1,\cdots,f_n)\|\cap\|\psi_2(f_1,\cdots,f_n)\|\in D$. 当且仅当 $\|\varphi(f_1,\cdots,f_n)\|\in D$.

设 $\varphi=\neg\psi\ (x_1,\ \cdots,\ x_n)$，$\mathscr{B}\models\varphi\ [f_D^1,\ \cdots,\ f_D^n]$ 当且仅当 $\mathscr{B}\models\neg\psi\ [f_D^1\cdots f_D^n]$，由归纳假设当且仅当 $\|\psi(f_1,\cdots,f_n)\|\notin D$. 由 D 是超滤知当且仅当 $I\setminus\|\psi(f_1,\cdots,f_n)\|\in D$ 当且仅当 $\|\varphi(f_1,\cdots,f_n)\|\in D$.

设 $\varphi=\exists x\psi\ (x,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)$. $\mathscr{B}\models\varphi\ [f_D^1,\ \cdots,\ f_D^n]$ 当且仅当存在 $f_D\in B$，$\mathscr{B}\models\psi\ [f_D,\ f_D^1,\ \cdots,\ f_D^n]$ 当且仅当存在 $f\in\prod_{i\in I}A_i$，$\|\psi(f,f_1,\cdots f_n)\|\in D$ 由引理 8.2.3 当且仅当 $\|\exists x\psi(f_1,\cdots,f_n)\|\in D$.

这就归纳地证明了（3）成立。很显然（4）是（3）的直接推论。 ▌

超积基本定理给出一种方法，使我们能够以模型族 $\mathscr{U}_i$，$i\in I$，来判定句子 φ 在超积模型 $\prod_D\mathscr{U}_i$ 中是否被满足. 如果一个模型族中对每个 $i\in I$ 都有 $\mathscr{U}_i=\mathscr{U}$，而模型族中所有模型都相同，则有如下推论：

推论 8.2.5 设 D 是 I 上超滤，则 $\mathscr{U}\prec\prod_D\mathscr{U}$.

证明 对每个元素 $a\in A$，令 $\hat{a}\in\prod_{i\in I}A$，$\hat{a}=\langle a;\ i\in I\rangle$，即对任意 $i\in I$，$\hat{a}\ (i)\ =a$. 令 d：$A\to\prod_D A$，是 A 到 $\prod_D A$ 的映射，对任意 $a\in A$，$d(a)=\hat{a}_D$. 易见 d 是 A 到 $\prod_D A$ 内的一一映射。对任意公式 $\varphi(x_1,\ \cdots,\ x_n)$，任意 $a_1,\ \cdots,\ a_n\in A$，由超积基本定理

$\prod_D\mathscr{U}\models\varphi[d(a_1),\cdots,d(a_n)]$ 当且仅当

$\{i\in I;\mathscr{U}\models\varphi[\hat{a}_1(i),\cdots,\hat{a}_n(i)]\}\in D$，当且仅当 $\mathscr{U}\models\varphi[a_1,\cdots,a_n]$.

因此有 $\mathscr{U}\prec\prod_D\mathscr{U}$. ▌

练习

8.2.1 设$\mathscr{U}i$，$i\in I$是互相初等等价的模型族，证明直积模型$\prod_{i\in I}\mathscr{U}_i$也与任一$\mathscr{U}_i$初等等价。

8.2.2 设$\mathscr{U}_i$，$i\in I$，是$\mathscr{L}$的模型族，φ是$\mathscr{L}$的一个句子，若$\vdash\varphi$，则$\|\varphi\|=I$.

8.2.3 若D是由$i_0\in I$生成的主超滤，则$\prod_D\mathscr{U}_i\cong\mathscr{U}_{i_0}$.

8.2.4 若I是有限集，D是I上超滤，则$\prod_D\mathscr{U}\cong\mathscr{U}$.

8.2.5 对每个$n\in\omega$，$\mathscr{U}_n=\langle A_n,\leqslant_n\rangle$是良序模型且$|A_n|\geqslant\omega$，设$D$是$\omega$上非主超滤，证明$\prod_D\mathscr{U}_n$不再是良序模型。

8.2.6 设$\mathscr{U}$是标准算术模型，D是ω上非主超滤。证明$\prod_D\mathscr{U}\not\cong\mathscr{U}$，$\prod_D\mathscr{U}$是非标准算术模型。

§8.3 超积的应用

超积方法可以用来构造模型，超积的第一个应用是纯代数地证明紧致性定理。

定理 8.3.1 （紧致性定理） 令Σ是$\mathscr{L}$中句子的集合，若Σ有限可满足，则Σ可满足。

证明 令$I=S_\omega(\Sigma)$，即I是由Σ的全部有限子集组成的集合。对每个$i\in I$，i是Σ的有限子集，由Σ有限可满足知i有模型，任选一个作为$\mathscr{U}_i\models i$，得到模型族$\mathscr{U}_i$，$i\in I$。对每个句子$\varphi\in\Sigma$，令$\hat{\varphi}=\{i,\ \varphi\in i\}$，$\hat{\varphi}$是$\Sigma$的含有$\varphi$的有限子集组成的集合．令$E=\{\hat{\varphi}:\varphi\in\Sigma\}$，则$E$保持有限交性质，由$E$可以生成$I$上超滤$D$，使$E\subset D$。作模型族$\mathscr{U}_i$，$i\in I$的超积模型$\prod_D\mathscr{U}_i$．我们证明$\prod_D\mathscr{U}_i\models\Sigma$.

先证明对任何句子 φ，$\hat{\varphi}\subseteq\|\varphi\|$. 由命题 8.2.1，$\|\varphi\|=\{i\in I:\mathscr{U}_i\models\varphi\}$. 对任意 $i\in\hat{\varphi}$，$\varphi\in i$，由 $\mathscr{U}_i\models i$ 知 $\mathscr{U}_i\models\varphi$，因此 $i\in\|\varphi\|$，即 $\hat{\varphi}\subseteq\|\varphi\|$.

再由 $\hat{\varphi}\in E$，知 $\hat{\varphi}\in D$. 由 D 是超滤知 $\|\varphi\|\in D$. 这样由超积基本定理 $\prod\limits_D\mathscr{U}_i\models\varphi$，从而 $\prod\limits_D\mathscr{U}_i\models\Sigma$. ▌

从以上证明可以看出这是一个纯语义的证明，这个证明与完全性定理无关。

语言 $\mathscr{L}$ 的一个模型类 $\mathscr{X}$ 称为**初等类**，如果 $\mathscr{L}$ 中存在一个句子 φ，使 $\mathscr{X}=\{\mathscr{U}:\mathscr{U}\models\varphi\}$，即 $\mathscr{X}$ 恰是满足 φ 的模型组成的类。模型类 $\mathscr{X}$ 称为**广义初等类**，如果 $\mathscr{L}$ 中存在句子集 T，使 $\mathscr{X}=\{\mathscr{U}:\mathscr{U}\models T\}$.

定理 8.3.2 设 $\mathscr{S}$ 是 $\mathscr{L}$ 的全体模型组成的类，(1) $\mathscr{L}$ 的模型类 $\mathscr{X}$ 是初等类，当且仅当 $\mathscr{X}$ 与 $\mathscr{S}\setminus\mathscr{X}$ 都是广义初等类；

(2) $\mathscr{L}$ 的模型类 $\mathscr{X}$ 是广义初等类当且仅当 $\mathscr{X}$ 对初等等价及超积封闭，即如果模型 $\mathscr{U}\in\mathscr{X}$，模型 $\mathscr{B}\equiv\mathscr{U}$，则 $\mathscr{B}\in\mathscr{X}$；如果 $\mathscr{U}_i$，$i\in I$ 是 $\mathscr{X}$ 中模型的一个族，D 是 I 上超滤，则超积模型 $\prod\limits_D\mathscr{U}_i\in\mathscr{X}$.

证明 (1) (⇒) 设 $\mathscr{X}$ 是初等类，则存在句子 φ，使 $\mathscr{X}=\{\mathscr{U}:\mathscr{U}\models\varphi\}$. 这样 $\mathscr{S}\setminus\mathscr{X}=\{\mathscr{U}:\mathscr{U}\models\neg\varphi\}$. 因而 $\mathscr{S}\setminus\mathscr{X}$ 也是初等类. 这样 $\mathscr{X}$ 与 $\mathscr{S}\setminus\mathscr{X}$ 都是广义初等类。

(⇐) 设 $\mathscr{X}$，$\mathscr{S}\setminus\mathscr{X}$ 都是广义初等类，则存在句子集 T_1，T_2，使 $\mathscr{X}=\{\mathscr{U}:\mathscr{U}\models T_1\}$，$\mathscr{S}\setminus\mathscr{X}=\{\mathscr{U}:\mathscr{U}\models T_2\}$. 又对任意模型 $\mathscr{U}$，$\mathscr{U}\in\mathscr{X}$ 当且仅当 $\mathscr{U}\notin\mathscr{S}\setminus\mathscr{X}$. 由练习 4.2.2 知 T_1，T_2 都可有限公理化，即存在句子 φ_1，φ_2 使 φ_1 是 T_1 的公理，φ_2 是 T_2 的公理. 这样 $\mathscr{X}=\{\mathscr{U}:\mathscr{U}\models\varphi_1\}$. $\mathscr{S}\setminus\mathscr{X}=\{\mathscr{U}:\mathscr{U}\models\varphi_2\}$，从而 $\mathscr{X}$ 是初等类。

(2) (⇒) 设 $\mathscr{X}$ 是广义初等类：即存在句子集 T，使 $\mathscr{X}=$

$\{\mathscr{U}: \mathscr{U}\models T^1\}$. 设 $\mathscr{U}\in\mathscr{X}$，$\mathscr{B}\equiv\mathscr{U}$，则 $\mathscr{U}\models T^1$，$\mathscr{B}\models T$，因此 $\mathscr{B}\in\mathscr{X}$. 设 $\mathscr{U}_i\in\mathscr{X}$，$i\in I$，则对任 $\varphi\in T^1$ 有 $\mathscr{U}_i\models\varphi$，$i\in I$，即 $\|\varphi\|=I\in D$，由超积基本定理，$\prod_D\mathscr{U}_i\models\varphi$，因此 $\prod_D\mathscr{U}_i\models T_1$，从而 $\prod_D\mathscr{U}_i\in\mathscr{X}$.

（$\Leftarrow$） 设 $\mathscr{X}$ 对初等等价及超积封闭。令 $\Sigma=\{\varphi$: 对任 $\mathscr{U}\in\mathscr{X}$，$\mathscr{U}\models\varphi\}$，再令 $\mathrm{Mod}\Sigma=\{\mathscr{U}: \mathscr{U}\models\Sigma\}$. 易见 $\mathrm{Mod}\Sigma$ 是广义初等类，显然有 $\mathscr{X}\subseteq\mathrm{Mod}\Sigma$。以下证明 $\mathrm{Mod}\Sigma\subseteq\mathscr{X}$。

设 $\mathscr{U}\in\mathrm{Mod}\Sigma$，令 $T=\mathrm{Th}\mathscr{U}=\{\varphi: \mathscr{U}\models\varphi\}$，对任意句子 $\varphi\in T$，必有模型 $\mathscr{B}\in\mathscr{X}$，$\mathscr{B}\models\varphi$，不然，对任意模型 $\mathscr{B}\in\mathscr{X}$，有 $\mathscr{B}\models\neg\varphi$. 这样 $\neg\varphi\in\Sigma$，$\mathscr{U}\models\neg\varphi$，得到 $\neg\varphi\in T$. 这与 $\varphi\in T$ 矛盾。

由此进一步对任意有限多个句子 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n\in T$，因为 $\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_n\in T$，也有模型 $\mathscr{B}\in\mathscr{X}$，使 $\mathscr{B}\models\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_n$. 仿照定理 8.3.1 的证明. 令 $I=S_\omega(T)$，对任意 $i\in I$，有模型 $\mathscr{B}_i\in\mathscr{X}$，使 $\mathscr{B}_i\models i$. 因此存在 I 上的超滤 D 使 $\prod_D\mathscr{B}_i\models T$. 这样便有 $\mathscr{U}\equiv\prod_D\mathscr{B}_i$.

由于 $\mathscr{B}_i$，$i\in I$，是 $\mathscr{X}$ 的一个模型族，$\mathscr{X}$ 对超积封闭，则 $\prod_D\mathscr{B}_i\in\mathscr{X}$，又 $\mathscr{X}$ 对初等等价封闭，进而有 $\mathscr{U}\in\mathscr{X}$. 于是我们证明了 $\mathrm{Mod}\Sigma\subseteq\mathscr{X}$，从而得到 $\mathscr{X}=\mathrm{Mod}\Sigma$，即 $\mathscr{X}$ 是广义等初类。▌

定理 8.3.3 设 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{L}$ 的模型. 则 $\mathscr{U}\equiv\mathscr{B}$ 当且仅当 $\mathscr{U}$ 初等嵌入 $\mathscr{B}$ 的超幂.

（$\Leftarrow$） 设 D 是超滤，$\mathscr{U}\preccurlyeq\prod_D\mathscr{B}$，则 $\mathscr{U}\equiv\prod_D\mathscr{B}$. 由推论 8.2.5，$\mathscr{B}\preccurlyeq\prod_D\mathscr{B}$，因此 $\mathscr{B}\equiv\prod_D\mathscr{B}$. 这样 $\mathscr{U}\equiv\mathscr{B}$.

（$\Rightarrow$） 设 $\mathscr{U}\equiv\mathscr{B}$. 令 $\mathscr{L}_A=\mathscr{L}\cup A$，$\Gamma_A$ 是 $\mathscr{U}$ 的初等图象. 对 Γ_A 中任意句子 $\varphi(a_1, \cdots, a_n)$，有 $\mathscr{U}\models\varphi[a_1, \cdots, a_n]$. 因此 $\mathscr{U}\models\exists x_1, \cdots, x_n\varphi(x_1, \cdots, x_n)$. 由 $\mathscr{U}\equiv\mathscr{B}$，

$\mathscr{B}\models\exists x_1, \cdots x_n\varphi(x_1, \cdots, x_n)$，存在 $b_1, \cdots, b_n\in\mathscr{B}$，

$\mathscr{B}\models\varphi[b_1, \cdots, b_n]$，于是有 $(\mathscr{B}, b_1, \cdots, b_n)\models\varphi(a_1, \cdots, a_n)$

由于 Γ_A 是模型 $\mathscr{U}$ 的初等图象，Γ_A 对合取封闭。令

$I=S_\omega(\Gamma_A)$，对任意的 $i\in I$，i 是 Γ_A 的有限子集，$i=\{\varphi_1(a_1,\cdots,a_n),\cdots,\varphi_m(a_1,\cdots,a_n)\}$，则存在 $b_1,\cdots,b_n\in B$，使

$$(\mathscr{B},b_1,\cdots,b_n)\models\varphi_1(a_1,\cdots,a_n)\wedge\cdots\wedge\varphi_m(a_1,\cdots,a_n)。$$

令 $\mathscr{B}_i=(\mathscr{B},b_1,\cdots,b_n)$，$\mathscr{B}_i\models i$. 仿定理 8.3.1 的证明存在 I 的超滤 D，使 $\prod_D\mathscr{B}'_i\models\Gamma_A$. 其中 $\mathscr{B}'_i$ 是 $\mathscr{B}_i$ 的 $\mathscr{L}_A$ 膨胀模型. 除了以 $b_1,\cdots,b_n$ 解释 i 中出现的新常量 $a_1,\cdots,a_n$ 外，对 A 中其他新常量可任意指定 B 中元素作其解释. 记 $\mathscr{B}^*$ 为 $\prod_D\mathscr{B}'_i$ 对语言 $\mathscr{L}$ 的归约模型，不难看出 $\mathscr{B}^*$ 为 $\prod_D\mathscr{B}$，这是因为 $\mathscr{B}$ 是每个 $\mathscr{B}'_i$ 的 $\mathscr{L}$ 归约模型. 由命题 4.3.3 (ii) 有 $\mathscr{U}\preccurlyeq\mathscr{B}^*$.　∎

对定理 8.3.3，Keisler 和 Shelah 证明了一个更强的结果，称为 Keisler-Shelah 定理.

定理 8.3.4 (**Keisler-Shelah 定理**) 设 $\mathscr{U},\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{L}$ 的模型，$\mathscr{U}\equiv\mathscr{B}$ 当且仅当存在超滤集 D，使 $\prod_D\mathscr{U}\cong\prod_D\mathscr{B}$.

定理的证明可参阅王世强《模型论基础》一书。

利用超积方法构造模型有许多有趣的应用，在数论，代数和分析中都有很好的例子。这里给出一个简单应用，说明数论中 Goldbach 性质在整数环的超积扩环中既可能成立也可能不成立。由此得到 Goldbach 性质与某些数论性质的和谐性和相对独立性。

设 I 是整数环，N 是正整数集，对任意. $m\in N$，令 $(m)=\{ma:a\in I\}$，(m) 是 I 中 m 的倍数组成的理想子环. $I/(m)$ 表示 I 模 (m) 得到的剩余类环. 所谓 **Goldbach 性质**即对一个环中任意非零非单位元 a，$2a$ 等于两个素元的和。

设 p 是有理素数，$I/(p^2)$ 中 p 是素元，一切与 p 相伴的元，即 p 与某单位元的乘积也是素元，共有 $(p-1)$ 个。而与 p 互素的元都是单位，有 $p(p-1)$ 个. 这样 $I/(p^2)$ 中只有单位元，素元和 0。$I/(p^2)$ 中无合元，因此显然适合 Goldbach 性质。

以 p_i，$i\in N$，表示全体有理素数，D 为 N 上 Frechet 滤生成

的任何一个超滤。由于 Goldbach 性质是可以用一阶语言表示的，因此在$\prod_D I/(p_i^2)$中 Goldbach 性质成立。又已知对任意 p_i，$I/(p_i^2)$是整数环 I 的同态环，因此 I 中成立的任意正句子在$I/(p_i^2)$中也成立，这样在$\prod_D I/(p^2 i)$ 中也成立. 因此 Goldbach 性质与整数环中成立的全体正句子集和谐。

再看剩余类环 $I/(4p^2q)$，其中 p，q 是互不相同的有理素数。易见 q 在其中不再是单位元也不是素元，只有 2 和 p 及与之相伴的元才是素元，因此 $2q$ 不等于两个素元的和. 这样 $I/(4p^2q)$ 不适合 Goldbach 性质。

令 p_i，$i\in I$，p，q 都是有理素数. D 是如上所述的超滤，则超积模型$\prod_D I/(4p^2q)$ 不适合 Goldbach 性质。仿上可知 Goldbach 性质的否命题与 I 中成立的全体正句子的集合也和谐。这样我们知道。Goldbach 性质与 I 中成立的正句子集是互相独立的了。

练习

8.3.1 设 $\mathscr{L}=\{+,\ \cdot,\ 0,\ 1\}$，$\mathscr{U}_i$，$i\in I$，是 $\mathscr{L}$ 的域模型族. D 是 I 上超滤，对每个 $f\in\prod_{i\in I}A_i$，令 $Z(f)=\{i\in I, f(i)=0\}$，$M=\{f\in\prod_{i\in I}A_i : Z(f)\in D\}$，试证明$\prod_{i\in I}\mathscr{U}_i$ 是环模型，M 是$\prod_{i\in I}\mathscr{U}_i$ 的极大理想，$\prod_D\mathscr{U}_i\cong\prod_{i\in I}\mathscr{U}_i/M$ 是域模型。

8.3.2 用超积方法证明：若 $\mathscr{U}$ 是有限模型，$\mathscr{B}\equiv\mathscr{U}$，则 $\mathscr{U}\cong\mathscr{B}$.

第九章　Lindenbaum 代数

§9.1　格与布尔代数

设 A 是非空集合，$\leqslant$ 是 A 上的偏序关系，设 $B\subseteq A$，元素 $a\in A$ 称为子集 B 的**上界**，如果对任意 $b\in B$ 都有 $b\leqslant a$. 称 $a\in A$ 是 B 的**下界**，如果对任意的 $b\in B$ 都有 $a\leqslant b$。如果 a 是 B 的最小上界则称 a 是 B 的**上确界**，记作 $a=\sup B$。如果 a 是 B 的最大下界则称 a 是 B 的**下确界**，记作 $a=\inf B$。一般地，$\sup B$、$\inf B$ 不一定存在。如果 a、b 是 A 的两个元素，则记 $\{a、b\}$ 的上确界为 $a\vee b$，下确界为 $a\wedge b$。

设 L 是非空集，$\leqslant$ 是 L 的偏序关系，如果对任意两个元素 a、$b\in L$，都有 $a\vee b$ 及 $a\wedge b$ 存在，则称 L 是**格**，对于一个格 L，任意 x、$y\in L$，有

$x\vee y=y\vee x$，$x\wedge y=y\wedge x$　　　交换律

$(x\vee y)\vee z=x\vee(y\vee z)$，$(x\wedge y)\wedge z=x\wedge(y\wedge z)$　　　结合律

$(x\wedge y)\vee y=y$，$(x\vee y)\wedge y=y$　　　吸收律

成立。

定理 9.1.1　设 A 是非空集合，$\wedge$，$\vee$ 是 A 上两个二元运算，并满足交换、结合和吸收律。则可以在 A 上定义序关系 $\leqslant$，使 A 对于 $\leqslant$ 构成格。

证明　设 x，$y\in A$，定义 $x\leqslant y$ 当且仅当 $x\wedge y=x$ 当且仅当 $x\vee y=y$. 设 $x\wedge y=x$，则 $x\vee y=(x\wedge y)\vee y=y$. 设 $x\vee y=y$，则 $x\wedge y=x\wedge(x\vee y)=x$，因此以上定义是有效的。

设 x、$y\in A$，则 $x\wedge y$，$x\vee y\in A$，由 $x\vee(x\wedge y)=x$ 及 $y\vee(x\wedge y)=y$ 有 $x\wedge y\leqslant x$，$x\wedge y\leqslant y$，因此 $x\wedge y$ 是 x、y 的下界，

对任意$a\in A$，如果$a\leqslant x$，$a\leqslant y$，则$a\wedge x=a$，$a\wedge y=a$，因此$a\wedge(x\wedge y)=(a\wedge x)\wedge y=a\wedge y=a$，从而$a\leqslant x\wedge y$，即$x\wedge y$是$x$、$y$的下确界。

同理可证$x\vee y$是x、y的上确界，这样A对于序关系$\leqslant$构成格。 ▌

例1 设$\langle A,\leqslant\rangle$是全序集，则$A$是格，这时
$x\wedge y=\min\{x,y\}$，$x\vee y=\max\{x,y\}$。

例2 设A是非空集合，$S(A)$是A的幂集，则$S(A)$对于$\subseteq$关系构成格。

例3 设N是正整数集，$|$是整除关系，即对任意m、$n\in N$，$m\mid n$意为m整除n，则N对于关系$|$构成格。这里对任意x、$y\in N$，$x\wedge y=(x,y)$，$x\vee y=[x,y]$，(x,y)，$[x,y]$分别表示x、y的最大公因数及最小公倍数。

设A对于序关系$\leqslant$是一个格，$B\subseteq A$，对任意x、$y\in B$，有$x\wedge y$，$x\vee y\in B$，则B对$\leqslant$也组成格，称之为A的**子格**。

为了简单，我们说一个非空集合A是格，而不一定特别指出A对某个序关系成为格。

设A、B是格，如果存在映射f：$A\to B$，f是满射，且对任意x、$y\in A$，有$f(x\wedge y)=f(x)\wedge f(y)$，$f(x\vee y)=f(x)\vee f(y)$，则称$f$是$A$到$B$的同态映射，也称格$A$和$B$同态。易见这时有$x\leqslant y$当且仅当$f(x)\leqslant f(y)$，如果$f$还是一一映射则称$f$为同构映射，也称格$A$和$B$同构。

设L是格，对任意x、y、$z\in L$，如果以下条件（1），（2）成立，则称L为**分配格**。

（1）$x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$；

（2）$x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z)$.

事实上，（1）和（2）是互相等价的.（请读者验证）。

设L是格，$A\subset L$，$b\in L$。若对任意$a\in A$都有$b\leqslant a$（$a\leqslant b$）

就称 b 是 A 的下界（上界）。若 $b\in L$ 是 A 的下界（上界），对 A 的任意下界（上界）x，有 $x\leqslant b$（$b\leqslant x$），就称 b 是 A 的下确界（上确界）。格 L 的子集 A 如果有上确界（下确界）则上确界（下确界）是唯一的。容易看出 L 的任意有限子集都有上、下确界。但一般地 L 的无限子集未必有上确界或下确界。如果格 L 的任意子集都有上下确界存在，则称 L 是**完备格**。设 $A\subset L$，我们也记 A 的上、下确界为 $\vee A$ 和 $\wedge A$. 特别对 $A=\{x_i: i\in I\}\subset L$，记 $\vee A=\bigvee_{i\in I}x_i$，$\wedge A=\bigwedge_{i\in I}x_i$.

命题 9.1.2 设 L 是格，对任意子集 $A\subset L$，都有下确界 $\wedge A\in L$，则 L 是完备格，如果对任意子集 $A\subset L$，都有上确界 $\vee A\in L$，则 L 也是完备格。

证明 设格 L 的任意子集都有上确界存在，我们证明也有下确界存在. 设 $A\subset L$，令 X 是 A 的下界组成的集合，则 $X\subset L$，X 有上确界，令 $\vee X=b$，我们证明 b 是 A 的下确界.

①先证 b 是 A 的下界. 若 b 不是 A 的下界，则存在元素 $a\in A$，有 $b\not\leqslant a$，则 $b\wedge a\neq b$，因此有 $b\wedge a<b$。但显然对任意元素 $x\in X$，$x\leqslant b$，$x\leqslant a$，因而 $x\leqslant b\wedge a$，这样 $b\wedge a$ 是 X 的上界，与 b 是 X 的上确界矛盾。

②对 A 的任意下界 x，有 $x\in X$，从而 $x\leqslant b$，因而 b 是 A 的下确界。

另一种对偶的情况类似可证。 ▌

由定义可以得到格中对偶法则成立，即将一个在格中成立的命题中的运算符号 $\vee$，$\wedge$ 分别以 $\wedge$、$\vee$ 代替后得到的对偶命题也成立。

格 L 本身的上确界称为 L 的**最大元**，L 的下确界称为 L 的**最小元**。设格 L 有最大元，最小元，则最大元、最小元都是唯一的，分别记为 1 和 0. 如果格 L 有最大、最小元 1 和 0，若对某元素 $x\in L$，存在 $y\in L$ 使 $x\vee y=1$，$x\wedge y=0$，则称 y 是 x 的补元。如

果 L 的每个元素都有补元，则称 L 为**可补格**。

命题 9.1.3 设 L 是分配格，L 有最大，最小元，某元素 $x\in L$，x 有补元，则 x 的补元是唯一的。

证明 设 y，$y'\in L$ 都是 x 的补元，即 $x\vee y=x\vee y'=1$，$x\wedge y=x\wedge y'=0$，我们有

$y=y\vee 0=y\vee(x\wedge y')=(y\vee x)\wedge(y\vee y')=1\wedge(y\wedge y')=y\wedge y'$，同理有 $y'=y\wedge y'$，这样 $y=y'$. ▌

由命题 9.1.3 可知可补的分配格中每个元素都有唯一确定的补元，记元素 $x\in L$ 的补元为 x'. 由 $x\vee x'=1$，$x\wedge x'=0$，易见 $x''=x$.

称可补的分配格为**布尔代数**，这个定义与第三章 § 3.3 中例 8 给出的定义是一致的，只是以"∨"、"∧"和"′"分别代替了例 8 中的运算"+"、"·"和"－". 不难证明例 8 定义中所给狄·摩根律（5）和补余律（8）成立，其余各条都是显然成立的，而由性质（1）—（8）显然也能证明模型 $\langle B, \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$ 是可补分配格，从而是布尔代数.

设集合 B 对运算 ∨、∧、′、构成布尔代数，子集 $D\subset B$，满足以下三个条件：

(i) $1\in D$；

(ii) 如果 x、$y\in D$，则 $x\wedge y\in D$；

(iii) 如果 x、$y\in B$，$x\leqslant y$ 且 $x\in D$，则 $y\in D$

就称 D 是布尔代数 B 的一个**滤集**。如果滤集 D 还满足条件：

(iv) 对任意元素 $x\in B$，$x\in D$ 当且仅当 $x'\notin D$，

则称 D 是布尔代数 B 的**超滤集**。

如果 D 是布尔代数 B 的滤集，$0\notin D$，则称 D 是 B 的真滤。每个超滤都是 B 的极大真滤。

设子集 $X\subset B$、X 可以生成真滤 D 当且仅当 X 有有限交性质，即任意有限个元素 x_1，…，x_n 属于 B，有 $x_1\wedge\cdots\wedge x_n\neq 0$。滤

D是由 X 生成的，则

$D=\{y\in B$：存在 x_1，…，$x_n\in X$，$x_1\wedge\cdots\wedge x_n\leqslant y\}$

设 B、B'是两个布尔代数，$f:B\to B'$是保持布尔代数运算的一个满射，即对任意 x、$y\in B$

$f(x\vee y)=f(x)\vee f(y)$

$f(x\wedge y)=f(x)\wedge f(y)$

$f(x')=(f(x))'$

则称 f 是布尔代数 B 到 B'上的**同态映射**，如果 f 是 B 到 B'内的保持运算的映射，则 f 是 B 到其像集 $f[B]$的同态映射，$f[B]=\{y\in B'$：存在 $x\in B$，$f(x)=y\}$，$f[B]$是 B'的一个子布尔代数。

如果同态映射 $f:B\to B'$还是一一映射，则称 f 是同构映射，这时称 B，B'**同构**，记作 $B\simeq B'$.

命题 9.1.4 设 f 是布尔代数 B 到 B'上的映射，则以下四个条件互相等价：

(1) f 是 B 到 B'上的同态映射；

(2) 对任意元素 x、$y\in B$，$f(x\vee y)=f(x)\vee f(y)$，且 $f(x')=(f(x))'$；

(3) 对任意元素 x、$y\in B$，$f(x\wedge y)=f(x)\wedge f(y)$，且 $f(x')=(f(x))'$；

(4) 对任意 x、$y\in B$、$x\leqslant y$ 当且仅当 $f(x)\leqslant f(y)$.

我们将证明留给读者。 ▌

以下我们讨论布尔代数之间的同态与滤集的关系。

设 $f:B\to B'$是同态映射，令 $f^{-1}(1)=\{x\in B:f(x)=1\}$，则 $f^{-1}(1)\subset B$，称$f^{-1}(1)$是映射 f 的壳。由 f 是同态映射，必有 $f(1)=1$，因此，$1\in f^{-1}(1)$。设 x、$y\in f^{-1}(1)$，则 $f(x\wedge y)=f(x)\wedge f(y)=1\wedge 1=1$，因此 $x\wedge y\in f^{-1}(1)$. 如果 x、$y\in B$，$x\leqslant y$，$x\in f^{-1}(1)$，则 $f(y)\geqslant f(x)=1$，从而 $f(y)=1$，因

此$y\in f^{-1}(1)$. 这样 $f^{-1}(1)$ 是布尔代数 B 的滤集。

反过来，我们设 $D\subset B$ 是布尔代数的一个滤集，定义 B 上一个等价关系$\sim_D$如下，对任意 x、$y\in B$

$x\sim_D y$ 当且仅当$(x'\vee y)\wedge(x\vee y')\in D$。

不难看出：对任意 $x\in B$，$x\sim_D x$；对任意 x、$y\in B$，如果 $x\sim_D y$，则 $y\sim_D x$；对任意 x、y、$z\in B$，如果 $x\sim_D y$，$y\sim_D z$ 则 $x\sim_D z$。对最后一条，由 $x\sim_D y$ 及 $y\sim_D z$ 有$(x'\vee y)\wedge(x\vee y')$，$(y'\vee z)\wedge(y\wedge z')\in D$. 因此 $x'\vee z=(x'\vee z)\vee(y\wedge y')=(x'\vee z\vee y)\wedge(x'\vee z\vee y')\geqslant(x'\vee y)\wedge(z\vee y')\geqslant((x'\vee y)\wedge(x\vee y'))\wedge((y'\vee z)\wedge(y\vee z'))\in D$. 从而有 $x'\vee z\in D$，同理有 $x\vee z'\in D$. 因此有

$$(x'\vee z)\wedge(x\vee z')\in D$$

这样 $x\sim_D z$，于是$\sim_D$ 的确是 B 上的等价关系。

对每个元素 $x\in B$，令 $x_D=\{y\in B:\ x\sim_D y\}$ 是 x 所在的等价类，令 $B/D=\{x_D:x\in B\}$，B/D 是 B 的全体等价类的集合。在B/D上定义运算$\wedge$，$\vee$和$'$。设 x、$y\in B$，令

$x_D\vee y_D=(x\vee y)_D$，$x_D\wedge y_D=(x\wedge y)_D$，$(x_D)'=(x')_D$.

我们证明以上定义是合理的，即定义与代表元取法无关。

设 x_1、x_2、y_1、$y_2\in B$. $x_1\sim_D x_2$，$y_1\sim_D y_2$. 则
$(x_1'\vee x_2)\wedge(x_1\vee x_2')$，$(y_1'\vee y_2)\wedge(y_1\vee y_2')\in D$

① $(x_1\vee y_1)'\vee(x_2\vee y_2)=(x_1'\wedge y_1')\vee(x_2\vee y_2)=$
$(x_1'\vee x_2\vee y_2)\wedge(y_1'\vee x_2\vee y_2)\geqslant(x_1'\vee x_2)\wedge(y_1'\vee y_2)\geqslant$
$((x_1'\vee x_2)\wedge(x_1\vee x_2'))\wedge((y_1'\vee y_2)\wedge(y_1\vee y_2'))\in D$
因此有$(x_1\vee y_1)'\vee(x_2\vee y_2)\in D$，
同理有$(x_1\vee y_1)\vee(x_2\vee y_2)'\in D$.
从而$((x_1\vee y_1)'\vee(x_2\vee y_2))\wedge((x_1\vee y_1)\vee(x_2\vee y_2))\in D$
即$(x_1\vee y_1)\sim_D(x_2\vee y_2)$，即$(x_1\vee y_1)_D=(x_2\vee y_2)_D$.
仿此可证

② $(x_1\wedge y_1)'\vee(x_2\wedge y_2)\in D$，$(x_1\wedge y_1)\vee(x_2\wedge y_2)'\in D$。因此

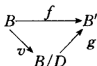
$((x_1 \wedge y_1)' \vee (x_2 \wedge y_2)) \wedge ((x_1 \wedge y_1) \vee (x_2 \wedge y_2)') \in D$。

从而$(x_1 \wedge y_1) \sim_D (x_2 \wedge y_2)$，即$(x_1 \wedge y_1)_D = (x_2 \wedge y_2)_D$

③ $((x_1')' \vee x_2') \wedge (x_1' \vee (x_2')') = (x_1 \vee x_2') \wedge (x_1' \vee x_2) \in D$，因此，$x_1' \sim_D x_2'$，即$(x_1')_D = (x_2')_D$.

令$1_D = 1$，$0_D = 0$，易见B/D构成布尔代数。令$v: B \to B/D$，对任意$x \in B$，$v(x) = x_D$，则易见v是B到B/D的同态映射；称v是B到B/D的自然同态映射。这时$v^{-1}(1_D) = \{x \in B : x_D = 1_D\} = \{x \in B : x \sim_D 1\}$。对任意$x \in D$，由$(x' \vee 1) \wedge (1' \vee x) = x \in D$有$x \sim_D 1$，得$x \in v^{-1}(1_D)$，因此$D \subset v^{-1}(1_D)$。反之任$x \in v^{-1}(1_D)$有$x \sim_D 1$，$x = (x' \vee 1) \wedge (1' \vee x) \in D$，因此$v^{-1}(1_D) \subseteq D$，这样，$v^{-1}(1_D) = D$.

定理 9.1.5 设B、B'是布尔代数，$f: B \to B'$是同态映射，$D = f^{-1}(1) \subset B$是f的壳，则有$g: B/D \simeq B'$是B/D到B'的同构映射，其中对任意$x \in B$，$g(x_D) = f(x)$. 用图表示为



其中对任$x \in B$，$v(x) = x_D$，$f = g \cdot v$.

证明 先证g是映射，设x、$y \in B$，$x \sim_D y$，即$x_D = y_D$，因此$(x' \vee y) \wedge (x \vee y') \in D$. 这样有

$$f((x' \vee y) \wedge (x \vee y')) = 1$$

由f是同态映射，有$f(x' \vee y) \wedge f(x \vee y') = 1$，必有$f(x' \vee y) = 1$，$f(x \vee y') = 1$. 因此有$(f(x))' \vee f(y) = 1$，$f(x) \vee (f(y))' = 1$，由后一式可得$(f(x))' \wedge f(y) = 0$，因此$f(x) = (f(x))'' = f(y)$，从而$g(x_D) = g(y_D)$，因此$g$是从$B/D$到$B'$的映射. 易见$g$是满射。

又设x、$y \in B$，$g(x_D) = g(y_D)$，则$f(x) = f(y)$，

$f((x' \vee y) \wedge (x \vee y')) = ((f(x))' \vee f(y)) \wedge (f(x) \vee (f(y))') = 1$，

因此$x \sim_D y$，即$x_D = y_D$，这样g是一一映射。

再证 g 保持运算，设 x、$y\in B$

$g(x_D\vee y_D)=g((x\vee y)_D)=f(x\vee y)=f(x)\vee f(y)=g(x_D)\vee g(y_D)$

$g((x_D)')=g(x'_D)=f(x')=(f(x))'=(g(x_D))'$

综上所述 g 是 B/D 到 B' 上的同构映射。 ▌

定理 9.1.5 是**布尔代数的同态定理**，定理说明布尔代数间的同态映射，可由这一映射的壳生成的自然同态 v 与由此导出的同构映射 g 复合而得到。

如果布尔代数 B 中只有两个元素 0、1，我们记 B 为 **2**。

定理 9.1.6 设 B 是布尔代数，D 是 B 的真滤集，则 $B/D\simeq\mathbf{2}$ 当且仅当 D 是 B 的超滤集。

证明 (⇒) 设 $B/D\simeq\mathbf{2}$，令 $v: B\to B/D$ 是自然同态，则 $v: B\to\mathbf{2}$，$D=v^{-1}(1)$。设 F 是 B 上的真滤，$F\supset D$，任意元素 $x\in F$，必 $x'\notin F$. 有 $x'\notin D$ 即 $v(x')\neq 1$。这样 $v(x')=0$，从而 $(v(x))'=0$，$v(x)=1$，$x\in D$。由此得 $F\subset D$，因此 $F=D$，即 D 是 B 上极大真滤，也就是超滤。

(⇐) 设 D 是 B 上超滤，任意 $x\in B$，有 x 或 $x'\in D$，因此 $v(x)=1$ 或 $v(x')=1$，即 $v(x)=1$ 或 $v(x)=0$。这就是说 B/D 中只有两个元素 0、1，因此 $B/D\simeq\mathbf{2}$。 ▌

练习

9.1.1 设 L 是格，$x\in L$，证明幂等律 $x\vee x=x\wedge x=x$.

9.1.2 设 B 是布尔代数，x、$y\in B$. 证明狄摩根律 $(x\vee y)'=x'\wedge y'$. $(x\wedge y)'=x'\vee y'$ 成立。

9.1.3 设 B 是布尔代数，x、$y\in B$. 证明 $x\leqslant y$ 当且仅当 $y'\leqslant x'$ 当且仅当 $x\wedge y'=0$ 当且仅当 $x'\vee y=1$.

9.1.4 设 B 是布尔代数，B_i，$i\in I$，是 B 的子布尔代数族，证明 $\bigcap_{i\in I}B_i$ 也是 B 的子布尔代数。

9.1.5　设 B 是布尔代数，$\{x_i : i\in I\}\subset B$. 如 $\bigvee_{i\in I} x_i$ 存在，证明 $\bigwedge_{i\in I} x'_i$ 也存在，且对每个元素 $y\in B$，$\bigvee_{i\in I}(y\wedge x_i)$ 存在，$\bigvee_{i\in I} y\wedge x_i = y\wedge\bigvee_{i\in I} x_i$.

9.1.6　设 B、B' 是布尔代数，$f: B\to B'$ 是同态映射，如果 $f^{-1}(0)=\{0\}$ 或 $f^{-1}(1)=\{1\}$，则 f 是同构映射。

9.1.7　设 B 是布尔代数，则 (i) 对任意 $x\in B$ 有滤集 $D\subset B$，使 $x\in D$；(ii) 对任意 x、$y\in B$，$x\neq y$，存在超滤集 $D\subset B$，使 $x\in D$，$y\notin D$，或 $x\notin D$，$y\in D$.

9.1.9　设 B 是布尔代数，$\mathscr{F}(B)$ 是 B 上全体超滤集的集合，令 $f: B\to S(\mathscr{F}(B))$，对任 $x\in B$，$f(x)=\{D\in\mathscr{F}(B): x\in D\}$，则 f 是布尔代数 B 到集合 $\mathscr{F}(B)$ 的幂集布尔代数 $S(\mathscr{F}(B))$ 上的同构映射。

§9.2　Lindenbaum 代数

设 $\mathscr{L}$ 是一阶语言，用 Form $(\mathscr{L})$ 记 $\mathscr{L}$ 的所有公式的集合。设 Σ 是 $\mathscr{L}$ 的和谐句子集，我们定义 Form $(\mathscr{L})$ 上二元关系 $\approx$，对任意 φ、$\psi\in$ Form$(\mathscr{L})$，$\varphi\approx\psi$，当且仅当 $\Sigma\vdash\varphi\leftrightarrow\psi$，易见 $\approx$ 是 Form$(\mathscr{L})$ 上等价关系，对任意 $\varphi\in$ Form$(\mathscr{L})$ 令 $|\varphi|=\{\psi: \psi\in\text{Form}(\mathscr{L}), \varphi\approx\psi\}$，$|\varphi|$ 是 φ 关于 $\approx$ 的等价类。令 $B=\{|\varphi|: \varphi\in\text{Form}(\mathscr{L})\}$ 对任 φ、$\psi\in$ Form$(\mathscr{L})$，定义 $|\varphi|\leqslant|\psi|$ 当且仅当 $\Sigma\vdash\varphi\to\psi$，显然有

命题 9.2.1　对任 φ_1、φ_2、ψ_1、$\psi_2\in$ Form$(\mathscr{L})$，如果 $|\varphi_1|=|\varphi_2|$，$|\psi_1|=|\psi_2|$，则 $|\varphi_1|\leqslant|\psi_1|$ 当且仅当 $|\varphi_2|\leqslant|\psi_2|$.　▌

命题 9.2.1 说明 $|\varphi|\leqslant|\psi|$ 的定义与代数元取法无关，因而是合理的，不难看出 $\leqslant$ 是 B 上的偏序关系，令 $|\varphi|=1$ 如 $\Sigma\vdash\varphi$；

$|\varphi|=0$如 $\Sigma\vdash\neg\varphi$.

定理 9.2.2 设 Σ 是 $\mathscr{L}$ 的和谐句子集，则 B 对于序关系 $\leqslant$ 及 0、1 构成布尔代数，记为 $B(\Sigma)$ 称 $B(\Sigma)$ 为 Σ 的 **Lindenbaum 代数**。

证明 先证 B 对 $\leqslant$ 构成格。对任 φ、ψ 属于 Form($\mathscr{L}$)，$\Sigma\vdash\varphi\wedge\psi\to\varphi$. $\Sigma\vdash\varphi\wedge\psi\to\psi$，因此 $|\varphi\wedge\psi|\leqslant|\varphi|$，$|\varphi\wedge\psi|\leqslant|\psi|$，对任 $\theta\in$ Form($\mathscr{L}$) 如果 $|\theta|\leqslant|\varphi|$，$|\theta|\leqslant|\psi|$，则 $\Sigma\vdash\theta\to\varphi$，$\Sigma\vdash\theta\to\psi$，因此 $\Sigma\vdash\theta\to\varphi\wedge\psi$，$|\theta|\leqslant|\varphi\wedge\psi|$ 这样 $|\varphi\wedge\psi|$ 是 $|\varphi|$、$|\psi|$ 的下确界，即 $|\varphi|\wedge|\psi|=|\varphi\wedge\psi|$。仿此可证 $|\varphi|\vee|\psi|=|\varphi\vee\psi|$.

由 $\Sigma\vdash(\varphi\vee\psi\wedge\theta)\leftrightarrow(\varphi\wedge\theta)\vee(\psi\wedge\theta)$. 易见 B 是分配格，0、1 分别是 B 的最小、最大元，对任 $\varphi\in$ Form($\mathscr{L}$)，$\Sigma\vdash\varphi\vee\neg\varphi$, $\Sigma\vdash\neg(\varphi\wedge\neg\varphi)$，因此 $|\varphi|\vee|\neg\varphi|=1$，$|\varphi|\wedge|\neg\varphi|=0$，即 B 中可定义 $|\varphi|'=|\neg\varphi|$，这样 B 是可补分配格，即 B 是布尔代数。 ▌

定理 9.2.3 令 Σ 是 $\mathscr{L}$ 的和谐句子集，τ 是 $\mathscr{L}$ 中无限多个变元的集，对任 $\varphi\in$ Form($\mathscr{L}$)，对任变元 x，在 $B(\Sigma)$ 中，

$$|\exists x\varphi|=\bigvee_{v\in\tau}|\varphi(x/v)|.$$

证明 首先由 §2.2.2 例 3，对任 $\varphi\in$ Form($\mathscr{L}$)，$\vdash\varphi(x/v)\to\exists x\varphi$. 因此 $\Sigma\vdash\varphi(x/v)\to\exists x\varphi$。从而对任 $v\in\tau$，$|\varphi(x/v)|\leqslant|\exists x\varphi|$，这样 $|\exists x\varphi|$ 是 $\{|\varphi(x/v)|:v\in\tau\}$ 的上界。

设 $|\psi|$ 是 $\{|\varphi(x/v)|:v\in\tau\}$ 的任一个上界，则对任 $v\in\tau$，有 $\Sigma\vdash\varphi(x/v)\to\psi$，由 τ 中含无限多个变元，知 τ 中必有变元不在 φ 和 ψ 中出现，取一个为 y，由 $\Sigma\vdash\varphi(x/y)\to\psi$ 及 y 不在 φ、ψ 中出现，可知有 $\Sigma\vdash\exists y(\varphi(x/y)\to\psi$，因而 $\Sigma\vdash\exists x\varphi(x)\to\psi$，这样又有 $|\exists x\varphi(x)|\leqslant|\psi|$ 即 $|\exists x\varphi(x)|$ 是上确界，得 $|\exists x\varphi|=\bigvee_{v\in\tau}|\varphi(x/v)|$. ▌

定理 9.2.3 说明在 $B(\Sigma)$ 中 $\{|\varphi(x/v)|: v\in\tau\}$ 的上确界总存在并等于 $|\exists x\varphi|$，同样可证其下确界也存在并等于 $|\forall x\varphi|$.

定理 9.2.4 设 Σ 是 $\mathscr{L}$ 的和谐句子集，D 是 Lindenbaum 代数 $B(\Sigma)$ 的一个滤集. 令 $T_D=\{\varphi: |\varphi|\in D\}$，则 D 是 $B(\Sigma)$ 的

超滤当且仅当 T_D 是极大和谐公式集.

证明 设 φ_1, $\varphi_2 \in T_D$, 则 $|\varphi_1|$, $|\varphi_2| \in D$, 由 D 是 $B(\Sigma)$ 的滤集知 $|\varphi_1 \wedge \varphi_2| \in D$, 因此 $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in T_D$. 由此 T_D 对有限合取封闭。设 $\varphi \in \mathrm{Form}(\mathscr{L})$, $T_D \vdash \psi$, 则存在有限多个公式 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n \in T_D$, 使 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n \vdash \psi$。因此有 $\vdash \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \rightarrow \psi$, $|\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n| \leqslant |\psi|$, 因而 $\psi \in T_D$, 即 T_D 对推论封闭。设 D 是超滤集, 则存在 $\varphi \notin D$, 因此存在 $\varphi \in \mathrm{Form}(\mathscr{L})$, $\varphi \notin T_D$。从而知 T_D 是和谐的公式集。设 $\varphi \in \mathrm{Form}(\mathscr{L})$, $\varphi \notin T_D$, 则 $|\varphi| \notin D$, 因此有 $|\neg\varphi| \in D$, $\neg\varphi \in T_D$, 这样 T_D 是极大和谐公式集。

反过来, 设 T_D 是极大和谐公式集, 则 $\varphi \in T_D$ 当且仅当 $\neg\varphi \notin T_D$. 因此 $|\varphi| \in D$, 当且仅当 $|\neg\varphi| \notin D$, 这样 D 是 $B(\Sigma)$ 的超滤集. ▌

设 Σ 是和谐的句子集, D 是 $B(\Sigma)$ 的一个超滤集, τ 是 $\mathscr{L}$ 全体变元的集合, 在 τ 上定义二元关系 $\sim$, 使对任 x、$y \in \tau$, $x \sim y$ 当且仅当 $|x \equiv y| \in D$, 易见 $\sim$ 是 τ 上等价关系. 设 $x \in \tau$, 令 $\widetilde{x} = \{y \in \tau;\ x \sim y\}$ 为 x 所在的等价类. 令 $A_D = \{\widetilde{x};\ x \in \tau\}$. A_D 是 τ 的全体等价类的集合, 我们试以 A_D 为论域定义 $\mathscr{L}$ 的模型。

设 R_i 是 $\mathscr{L}$ 的 n 元关系符号, 定义 A_D 上 n 元关系符号 R_i: 对任意 $x_1, \cdots, x_n \in \tau$,

$R_i(\widetilde{x}_1, \cdots, \widetilde{x}_n)$ 成立当且仅当 $|R_i(x_1, \cdots, x_n)| \in D$.

设 F_j 是 $\mathscr{L}$ 的 m 元关系符号, 定义 A_D 上的 m 元函数 F_j: 对任意 $x_1, \cdots, x_m \in \tau$, 如存在 $y \in \tau$, 使

$|F_j(x_1, \cdots, x_m) \equiv y| \in D$ 就令 $Fj(\widetilde{x}_1, \cdots, \widetilde{x}_m) = \widetilde{y}$.

设 c_k 是 $\mathscr{L}$ 的常量符号, 如果存在 $x \in \tau$, 使 $|c_k \equiv x| \in D$, 则令 $\widetilde{x}$ 作 c_k 在 A_D 中的解释。

由 D 是超滤不难看出上述定义与代表元取法无关. 但是上述定义一般不能构成 $\mathscr{L}$ 的模型.

例 1 设 $\mathscr{L} = \{c\}$. c 是常量符号, $\Sigma = \{\exists v_0 v_1 (v_0 \not\equiv v_1)\}$, 设

$A=\{a,b\}$. $\mathscr{U}=\langle A, b\rangle$是$\mathscr{L}$的模型. 给定指派$\sigma=\langle a,a,\cdots\rangle$,即指派$\sigma$解释任意变元$v_i$, $i\in\omega$。令$D=\{|\varphi|\in B(\Sigma): \mathscr{U}\models_\sigma\varphi\}$, 由于$T_D=\{\varphi: \mathscr{U}\models_\sigma\varphi\}$是极大和谐的公式集, 知$D$是$B(\Sigma)$的超滤集, 但由$\mathscr{U}\models_\sigma\neg(c\equiv v_i)$, $i\in\omega$, 知对任意变元$v_i\in\tau$, $|c\equiv v_i|\notin D$. 因此上述定义的A_D中常量c没有解释.

为了使以上定义的$\langle A_D, \{R_i\}_{i\in I}, \{F_i\}_{j\in J}, \{C_k\}\rangle$成为$\mathscr{L}$的模型, 我们必须对超滤$D$加以适当的限制。

设D是$B(\Sigma)$上超滤, 如果对任意$\varphi\in \mathrm{Form}(\mathscr{L})$, $\bigvee_{v\in\tau}|\varphi(x/v)|\in D$当且仅当对某$v\in\tau$, $|\varphi(x/v)|\in D$, 就称D是**完全超滤**。由定理9.2.3, 如果D是完全超滤, 则$|\exists x\varphi|\in D$当且仅当对某$v\in\tau$, $|\varphi(x/v)|\in D$.

容易看出并非每个超滤D都是完全的。例如上例中, 由$\mathscr{U}\models_\sigma\exists x(c\equiv x)$, 有$|\exists x(c\equiv x)|\in D$, 但对任意变元$v\in\tau$, $\mathscr{U}\models_\sigma\neg(c\equiv v)$, 使$|c\equiv v|\notin D$。因此$D$不是完全的。

定理 9.2.5 设D是$B(\Sigma)$上完全超滤, 则上面定义的$\mathscr{U}_D=\langle A_D, \{R_i\}_{i\in I}, \{F_j\}_{j\in J}, \{C_k\}_{k\in K}\rangle$是$\mathscr{L}$的模型. 且对任意$\varphi(x_1,\cdots,x_n)\in\mathrm{Form}(\mathscr{L})$, 任意$v_1, \cdots, v_n\in\tau$.

(1) $\mathscr{U}_D\models\varphi[\tilde{v}_1, \cdots, \tilde{v}_n]$当且仅当$|\varphi(v_1,\cdots,v_n)|\in D$.

证明 设F_j是$\mathscr{L}$的m元函数符号, $x_1, \cdots, x_m\in\tau$, 由$\vdash\exists x(F_j(x_1,\cdots,x_n)\equiv x)$, $|\exists x(F_j(x_1,\cdots,x_n)\equiv x)|\in D$. 由$D$是完全超滤有$v\in\tau$, 使$|F_j(x_1,\cdots,x_n)\equiv v)|\in D$. 因此$\mathscr{U}_D$中有$\tilde{v}\in A_D$, 使$F_j(\tilde{x}_1,\cdots,\tilde{x}_n)=\tilde{v}$. 同样$\mathscr{L}$中每个常量符号在$\mathscr{U}_D$中也都有解释, 这样$\mathscr{U}_D$是$\mathscr{L}$的模型.

对公式$\varphi(x_1, \cdots, x_n)$的复杂性归纳, 类似于完全性定理证明的方法可证明(1)成立, 我们把详细的过程留给读者. ▌

推论 9.2.6 设Σ是和谐的句子集, D是$B(\Sigma)$上的完全超滤, 则$\mathscr{U}_D\models\Sigma$.

证明 令 $\sigma = \langle \tilde{v}_0, \tilde{v}_1, \cdots \rangle$ 是 $\mathscr{U}_D$ 的标准指派，由定理 9.2.5 $\mathscr{U}_D \models_\sigma T_D$，但对任意句子 $\varphi \in \Sigma$. 由 $\Sigma \vdash \varphi$，有 $|\varphi| = 1$，从而 $|\varphi| \in D, \varphi \in T_D$. 因此 $\mathscr{U}_D \models \varphi$. 这样就有 $\mathscr{U}_D \models \Sigma$. ▌

推论 9.2.6 说明只要 D 是 $B(\Sigma)$ 上完全超滤，就可以得到 Σ 的一个模型 $\mathscr{U}_D$. 称由完全超滤 D 决定的模型 $\mathscr{U}_D$ 为**基本模型**. 如果 Σ 的模型的论域是由 $\mathscr{L}$ 的变元集 τ 的某个等价分类组成，可以证明这个模型同构于某完全超滤 D 决定的基本模型。还可以证明不同的完全超滤决定不同的基本模型. 这样 $B(\Sigma)$ 的完全超滤的类与 Σ 的基本模型的类之间有一个一一对应。但是，一般说来，如果语言 $\mathscr{L}$ 不可数，则 Lindenbaum 代数 $B(\Sigma)$ 中不一定有完全超滤。

例如，$\mathscr{L} = \{c_i : i \in I\}$，$I$ 是不可数集合. $\Sigma = \{c_i \neq c_j : i, j \in I, i \neq j\}$。这样，$\Sigma$ 是和谐句子集. 但是 Σ 的每个模型都是不可数的. 因此也就不是基本模型. 由推论 9.2.6，$B(\Sigma)$ 中没有完全超滤.

对可数语言 $\mathscr{L}$，我们将证明，任意和谐句子集 Σ，$B(\Sigma)$ 中都有完全超滤。

引理 9.2.7 **(Rasiowa-Sikorski 定理)** 设 B 是布尔代数，S 是 B 的子集的可数族。如果对每个 $A \in S$，$A \subset B$，有上确界 $\vee A \in B$，则存在 B 上超滤 D，使对任意 $A \in S$，如果 $\vee A \in D$，则 $A \cap D \neq \varnothing$。

证明 枚举 $S = \{A_n : n \in \omega\}$，令 $a_n = \vee A_n : n \in \omega$。归纳定义 B 的一个元素序列 $\{b_n : n \in \omega\}$，使对每个 $n \in \omega$，$b_n \in A_n$，且 $\{a_0' \vee b_0, \cdots, a_n' \vee b_n\}$ 的下确界不是 0.

$n = 0$ 时，只要取 $b_0 = 1$。设 $n \in \omega$，对每个 $m < n$，已经找到 b_m，使 $y = (a_0' \vee b_0) \wedge \cdots \wedge (a'_{n-1} \vee b_{n-1}) \neq 0$.

如果对任意元素 $b \in A_n$，都使 $y \wedge (a'_n \vee b) = 0$. 则 $(y \wedge a'_n) \vee (y \wedge b) = 0$，因此 $y \wedge a'_n = 0$. 且 $y \wedge b = 0$. 这样对任意 $b \in A_n$，$y \leqslant b'$。由 $\vee A_n \in B$，由 §9.1 练习 5，$\wedge \{b' : b \in A_n\} =$

$(\vee A)'=a'_n\in B$,这样 $y\leqslant a'_n$，因此有 $y=y\wedge a'_n=0$，这与归纳假设 $y\neq 0$ 矛盾。

这样必有 $b_n\in A_n$，使 $y\wedge(a'_n\vee b_n)=0$，从而归纳地证明了 $\{a'_0\vee b_0, a'_1\vee b_1, \cdots\}$ 有有限交性质，因此可以生成 B 的一个滤集。并且可以扩充成 B 的超滤集 D.

对任意 $A_n\in S$，如果 $\vee A_n=a_n\in D$，则 $a'_n\notin D$。由 $a'_n\vee b_n\in D$，必有 $b_n\in D$，由于 $b_n\in A_n$，因此有 $A_n\cap D\neq\varnothing$。 ▌

定理 9.2.8 设 $\mathscr{L}$ 可数，Σ 是 $\mathscr{L}$ 的和谐句子集，则$B(\Sigma)$有完全超滤。

证明 由于 $\mathscr{L}$ 可数，因此 Form($\mathscr{L}$) 可数。令
$A_\varphi=\{|\varphi(x/v_i)|: v_i\in\tau\}$，$S=\{A_\varphi: \varphi\in \text{From}(\mathscr{L})\}$ 则 S 是$B(\Sigma)$的可数子集族。由引理 9.2.7，存在超滤 D，使对任意$\varphi\in\text{Form}(\mathscr{L})$，如果 $\bigvee\limits_{v_i\in\tau}|\varphi(x/v_i)|\in D$，则存在某 $v_i\in\tau$，使 $|\varphi(x/v_i)|\in D$。由于 $\bigvee\limits_{v_i\in\tau}|\varphi(x/v_i)|=|\exists x\varphi|$，因此 D 是 $B(\Sigma)$ 的完全超滤。 ▌

推论 9.2.9 设 $\mathscr{L}$ 可数. Σ 是 $\mathscr{L}$ 的和谐句子集，则存在基本模型 $\mathscr{U}$，$\mathscr{U}\models\Sigma$.

证明 由推论 9.2.8，$B(\Sigma)$ 中有完全超滤 D，则基本模型 $\mathscr{U}_D\models\Sigma$. ▌

推论 9.2.9 是可数语言的 Gödel 完全性定理。

本节所述的 Lindenbaum 代数是建立在 Form($\mathscr{L}$)上的。如果记 $\text{Form}_n(\mathscr{L})$ 为 $\mathscr{L}$ 中全体公式 $\varphi(v_0, \cdots, v_{n-1})$ 的集合，即 $\text{Form}_n(\mathscr{L})$中公式的自由变元都在 $v_0, \cdots, v_{n-1}$之中，用同样的方法可以构造 $\text{Form}_n(\mathscr{L})$ 上的 Lindenbaum 代数，如果 Σ 是 $\mathscr{L}$ 的和谐句子集，$B_n(\Sigma)=\{|\varphi|: \varphi\in\text{Form}_n(\mathscr{L})\}$，则 $B_n(\Sigma)$ 是$B(\Sigma)$的子布尔代数。如果 Σ 只是 $\mathscr{L}$ 的逻辑公理或 $\mathscr{L}$ 的恒真公式组成的集合，记 $B(\Sigma)$ 为 $B(\varnothing)$，记 $B_n(\Sigma)$ 为 $B_n(\varnothing)$，或简记为 B，B_n。特别 B_0 是 $\mathscr{L}$ 的全体恒真句子集的布尔代数。

练习

9.2.1 设 T 是 $\mathscr{L}$ 的和谐理论，在 Lindenbaum 代数 B_0 中定义 $D(T)=\{|\varphi|:\varphi\in T\}$. 证明：

(i) $D(T)$ 是 B_0 的滤集；

(ii) T 是有限可公理化的当且仅当 $D(T)$ 是 B_0 的主滤；

(iii) T 是完全理论当且仅当 $D(T)$ 是 B_0 的超滤。

9.2.2 令 Σ 是可数语言 $\mathscr{L}$ 的和谐句子集，D 是 $B_n(\Sigma)$ 的超滤，证明存在 Σ 的可数模型 $\mathscr{U}$，存在 a_0，…，$a_{n-1}\in A$，使 $D=\{|\varphi(v_0,\cdots,v_{n-1})|:\mathscr{U}\models\varphi[a_0,\cdots,a_{n-1}]\}$.

9.2.3 设 $\mathscr{U}$ 是句子集 Σ 的可数模型. $\bar{a}=(a_0,\cdots,a_{n-1})$ 是论域 A 中 n 个元素组成的 n 元序对，在 $B_n(\Sigma)$ 中令

$D(\mathscr{U},\bar{a})=\{|\varphi(v_0,\cdots,v_{n-1})|:\mathscr{U}\models\varphi[a_0,\cdots,a_{n-1}]\}$,

则 $D(\mathscr{U},\bar{a})$ 是$B_n(\Sigma)$中超滤集. 如果 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 都是 Σ 的可数模型，$\bar{a}$，$\bar{b}$ 分别是论域 A、B 的 n 元序对，则

$D(\mathscr{U},\bar{a})=D(\mathscr{B},\bar{b})$ 当且仅当$(\mathscr{U},\bar{a})\equiv(\mathscr{B},\bar{b})$.

第十章　完全理论的可数模型

§10.1　可数原子模型

本章讨论可数语言 $\mathscr{L}$ 的完全理论的一些可数模型。

设 T 是 $\mathscr{L}$ 的完全理论，$\mathscr{L}$ 的公式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 称为 T 的**完备公式**，如果对 $\mathscr{L}$ 的每个公式 $\psi(x_1, \cdots, x_n)$

$$T \vdash \varphi \to \psi \quad 或 \quad T \vdash \varphi \to \neg\psi$$

恰有一个成立。这里 $T \vdash \varphi \to \psi$ 是

$T \vdash \forall x_1 \cdots x_n (\varphi(x_1, \cdots, x_n) \to \psi(x_1, \cdots, x_n))$ 的简写，其余类似。

$\mathscr{L}$ 的公式 $\theta(x_1, \cdots, x_n)$ 称为 T 的**可完备化的公式**，如果有一个 T 的完备公式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$，使

$$T \vdash \varphi(x_1, \cdots, x_n) \to \theta(x_1, \cdots, x_n)$$

成立，如果对 T 的任意完备公式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 都

$$T \nvdash \varphi(x_1, \cdots, x_n) \to \theta(x_1, \cdots, x_n).$$

因此 $T \vdash \varphi(x_1, \cdots, x_n) \to \neg\theta(x_1, \cdots, x_n)$. 则称 $\theta(x_1, \cdots, x_n)$ 是不可完备化的公式。

称理论 T 是 $\mathscr{L}$ 的**原子理论**，如果 $\mathscr{L}$ 中每个与 T 和谐的公式都是 T 的可完备化的公式。

模型 $\mathscr{U}$ 称为 $\mathscr{L}$ 的**原子模型**，如果对任意 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in A$，存在 $\mathrm{Th}(\mathscr{U})$ 的完备公式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 使 $\mathscr{U} \models \varphi(a_1, \cdots, a_n)$. 如果 $\mathscr{U}$ 是原子模型，$\mathscr{U}$ 又是可数模型，就称 $\mathscr{U}$ 是可数原子模型。

定理 10.1.1　（原子模型存在定理） 设 T 是可数完全理论，则 T 有原子模型当且仅当 T 是原子理论。

证明（⇒）　设 T 有原子模型 $\mathscr{U}$，由 T 是完全理论，T 是

$\mathrm{Th}(\mathscr{U})$的公理集，设 $\psi(x_1, \cdots, x_n)$ 是 $\mathscr{L}$ 中与 T 和谐的任意一个公式．由 T 完全，必有

$T \models \exists x_1 \cdots x_n \psi(x_1, \cdots, x_n)$

这样必有 $a_1, \cdots, a_n \in A$，使 $\mathscr{U} \models \psi[a_1, \cdots, a_n]$．由 $\mathscr{U}$ 是原子模型，知必有 $\mathrm{Th}(\mathscr{U})$ 的因而也是 T 的完备公式 $\varphi(a_1, \cdots, a_n)$，使 $\mathscr{U} \models \varphi[a_1, \cdots, a_n]$。这时不可能有

$T \vdash \varphi(x_1, \cdots, x_n) \to \neg\psi(x_1, \cdots, x_n)$，因此只能有

$T \vdash \varphi(x_1, \cdots, x_n) \to \psi(x_1, \cdots, x_n)$。

这样 $\psi(x_1, \cdots, x_n)$ 是 T 的可完备化的公式。

($\Leftarrow$)　设 T 是 $\mathscr{L}$ 的原子理论，令

$\Gamma_n(x_1, \cdots, x_n) = \{\neg\varphi(x_1, \cdots, x_n) : \varphi(x_1, \cdots, x_n)$是 T 的完备公式$\}$

对任意与 T 和谐的公式 $\psi(x_1, \cdots, x_n)$，由 T 是原子理论，ψ 可完备化，因此存在$\neg\varphi(x_1, \cdots, x_n) \in \Gamma_n$ 使 $T \nvdash \varphi \to \neg\psi$，即 T 与公式 $\varphi \wedge \psi$ 和谐，也就是说 T 与 $\psi \wedge \neg(\neg\varphi)$ 和谐。这样 T 局部省略 Γ_n．应用推广省略型定理，T 有可数模型 $\mathscr{U}$ 省略每个 Γ_n，这时对任意 $a_1, \cdots, a_n \in A$，存在某一个公式$\neg\varphi(x_1, \cdots, x_n) \in \Gamma_n$，使 $\mathscr{U} \not\models \neg\varphi[a_1, \cdots, a_n]$，因而 $\mathscr{U} \models \varphi[a_1, \cdots, a_n]$。

由 Γ_n 的定义知 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 是 T 的，因而也是 $\mathrm{Th}(\mathscr{U})$ 的完备公式，因此 $\mathscr{U}$ 是可数原子模型。 ▌

定理 10.1.2　(可数原子模型的唯一性定理)　设 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 都是 $\mathscr{L}$ 的可数原子模型，$\mathscr{U} \equiv \mathscr{B}$，则 $\mathscr{U} \cong \mathscr{B}$.

证明　设 $\mathscr{U}$ 或 $\mathscr{B}$ 有限，则由 $\mathscr{U} \equiv \mathscr{B}$，必有 $\mathscr{U} \cong \mathscr{B}$．现在令 $\mathscr{U}$、$\mathscr{B}$ 都是可数无限模型。我们分别枚举论域 A、B 的元素：

$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$

$b_0, b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots$

用过来过去法给出 A、B 的重排。

令 $T = \mathrm{Th}\mathscr{U} = \mathrm{Th}\mathscr{B}$，先取 $a'_0 = a_0$，由 $\mathscr{U}$ 是原子模型，有 T

的完备公式 $\varphi_0(x_0)$，使 $\mathscr{U}\models\varphi_0[a_0]$，因此 $\mathscr{U}\models\exists x_0\varphi_0(x_0)$. 由 $\mathscr{U}\equiv\mathscr{B}$ 又有 $\mathscr{B}\models\exists x_0\varphi(x_0)$，因此存在 $b\in B$，使 $\mathscr{B}\models\varphi[b]$. 选取最前面的一个元为 b'_0，$\mathscr{B}\models\varphi[b'_0]$.

现在选取 B 中未选过的元素中最前面的一个为 b'_1，由 $\mathscr{B}$ 是原子模型，有 T 的完备公式 $\varphi_1(x_0, x_1)$，使 $\mathscr{B}\models\varphi_1[b'_0, b'_1]$，现在 $\mathscr{B}\models\exists x_1\varphi_1(b'_0x_1)$，因此不能有 $T\vdash\varphi_0(x_0)\to\neg\exists x\varphi_1(x_0x_1)$，由于 $\varphi_0(x_0)$ 是 T 的完备公式，必有 $T\vdash\varphi_0(x_0)\to\exists x_1\varphi_1(x_0x_1)$。

因此 $\mathscr{U}\models\forall x_0(\varphi_0(x_0)\to\exists x_1\varphi_1(x_0x_1))$. 特别对 $a'_0\in A$，$\mathscr{U}\models\varphi_0(a'_0)\to\exists x_1\varphi_1(a'_0x_1)$，由 $\mathscr{U}\models\varphi_0[a'_0]$，有 $\mathscr{U}\models\exists x_1\varphi_1(a'_0x_1)$，这样存在 $a\in A$，使 $\mathscr{U}\models\varphi_1[a'_0a]$。选取最前面的一个为 a'_1，使 $\mathscr{U}\models\varphi_1[a'_0, a'_1]$。

容易看出这一过程可以不断重复，最后可得到 A、B 的重排

$a'_0, a'_1, a'_2, \cdots, a'_n, \cdots$

$b'_0, b'_1, b'_2, \cdots, b'_n, \cdots$

使对任意 $n<\omega$，存在 T 的完备公式 $\varphi(x_0, \cdots, x_n)$. $\mathscr{U}\models\varphi[a'_0, \cdots, a'_n]$ 且 $\mathscr{B}\models\varphi[b'_0, \cdots, b'_n]$.

令 $f: \mathscr{U}\to\mathscr{B}$，对任 $n<\omega$，$f(a'_n)=b'_n$. 对 $\mathscr{L}$ 的任意公式 $\psi(x_0, \cdots, x_n)$，如果 $\mathscr{U}\models\psi[a'_0, \cdots, a'_n]$，则一定有 T 的完备公式 $\varphi(x_1\cdots x_n)$ 使 $T\models\varphi\to\psi$. 因此必有 $\mathscr{B}\models\psi[b'_0, \cdots, b'_n]$，易见 f 是模型 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{B}$ 上的同构映射，因而 $\mathscr{U}\cong\mathscr{B}$. ▌

原子模型的存在定理说明只要理论 T 是完全的并且是可数原子理论，则 T 必有可数原子模型。原子模型的唯一性定理说明可数完全理论如果有可数原子模型，则在同构的意义下至多只能有一个可数原子模型。但是如何判别一个理论 T 是原子理论？如何判别一个模型是原子模型呢？下面引入素模型概念，并证明可数原子模型就是可数素模型，而素模型可以看成理论的最小模型，因而也是容易判别的。

$\mathscr{L}$ 的模型 $\mathscr{U}$ 称为**素模型**，如果 $\mathscr{U}$ 能初等嵌入 Th$\mathscr{U}$ 的每个

模型中。$\mathscr{U}$ 称为**可数地素模型**，如果 $\mathscr{U}$ 能初等嵌入 $\mathrm{Th}(\mathscr{U})$ 的每个可数模型之中。

定理 10.1.3 设 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{L}$ 的模型，则 $\mathscr{U}$ 是可数原子模型当且仅当 $\mathscr{U}$ 是素模型当且仅当 $\mathscr{U}$ 是可数地素模型。

证明 (1) 设 $\mathscr{U}$ 是可数原子模型，令 $T=\mathrm{Th}(\mathscr{U})$，设 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{L}$ 的一个模型，$\mathscr{B}\models T$，我们证明 $\mathscr{U}\preccurlyeq\mathscr{B}$.

列出论域 A 中元素 $a_0, a_1, a_2, \cdots$，用单向的过来过去方法给出论域 B 中元素的一个可数叙列：

对 $a_0\in A$，由 $\mathscr{U}$ 是原子模型，存在 T 的完备公式 $\varphi_0(x_0)$，使 $\mathscr{U}\models\varphi_0$ $[a_0]$，因而有 $\mathscr{U}\models\exists x_0\varphi_0(x_0)$，自然有 $\exists x_0\varphi_0(x_0)\in T$，从而 $\mathscr{B}\models\exists x_0\varphi_0(x_0)$，这样有 $b\in B$，使 $\mathscr{B}\models\varphi_0$ $[b]$，选一个作为 b_0，$\mathscr{B}\models\varphi_0$ $[b_0]$.

对 $a_1\in A$，也存在 T 的完备公式 $\varphi_1(x_0x_1)$，使 $\mathscr{U}\models\varphi_1$ $[a_0a_1]$，因此 $\mathscr{U}\models\exists x_1\varphi_1(a_0x_1)$，这样不能有 $T\models\varphi_0(x_0)\to\neg\exists x_1\varphi_1(x_0x_1)$，由于 $\varphi_0(x_0)$ 是 T 的完备公式，必有 $T\models\varphi_0(x_0)\to\exists x_1\varphi_1(x_0x_1)$，这样对任意 $b\in B$，特别对 $b_0\in B$，有

$\mathscr{B}\models\varphi_0(b_0)\to\exists x_1\varphi_1(b_0x_1)$

因此存在 $b\in B$，可选一个为 $b_1\in B$，使

$\mathscr{B}\models\varphi_1[b_0b_1]$

容易看出，这一过程可以不断重复，最后得到论域 B 的可数子集 $\{b_0, b_1, b_2, \cdots\}$，对任意 $n<\omega$ 存在 T 的完备公式 $\varphi_n(x_0, \cdots, x_n)$使

$\mathscr{U}\models\varphi_n$ $[a_0, \cdots, a_n]$，$\mathscr{B}\models\varphi_n$ $[b_0, \cdots, b_n]$

令 $f:\mathscr{U}\to\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{B}$ 内的映射，对任意 $n<\omega$，$f(a_n)=b_n$

设 $\psi(x_0,\cdots,x_n)$ 是 $\mathscr{L}$ 的任意一个公式，如果$\mathscr{U}\models\psi$ $[a_0, \cdots, a_n]$ 则必有

$T\vdash\varphi(x_0,\cdots,x_n)\to\psi(x_0,\cdots,x_n)$

因而有 $\mathscr{B}\models\psi$ $[a_0, \cdots, a_n]$，不难看出 f 是 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{B}$ 内的同构嵌

入，又是初等嵌入，因此 $\mathscr{U}$ 是素模型。

(2) $\mathscr{U}$ 是素模型，显然 $\mathscr{U}$ 是可数地素模型。

(3) 设 $\mathscr{U}$ 是可数地素模型，我们证明 $\mathscr{U}$ 是可数原子模型。

任意 a_1，…，$a_n \in A$，令 $\Gamma(x_1 \cdots x_n)=$
$\{\psi(x_1, \cdots, x_n): \mathscr{U} \models \psi[a_1, \cdots, a_n]\}$ 是由 a_1，…，a_n 实现的型，令 $T=\mathrm{Th}(\mathscr{U})$ 对 T 的任意可数模型 $\mathscr{B}$，有 f：$\mathscr{U} \preccurlyeq \mathscr{B}$，易见有

$$\mathscr{B} \models \Gamma[f(a_1), \cdots, f(a_n)]$$

因此 Γ 被 T 的任意可数模型实现，由省略型定理，Γ 不能被 T 局部省略。因此 $\Gamma(x_1, \cdots, x_n)$ 被 T 局部实现，即有一个与 T 和谐的公式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$，使对任意 $\psi(x_1, \cdots, x_n) \in \Gamma$，$T \vdash \varphi(x_1, \cdots, x_n) \rightarrow \psi(x_1, \cdots, x_n)$。但对 $\mathscr{L}$ 的每个公式 $\psi(x_1, \cdots, x_n)$ 或 $\psi \in \Gamma$ 或 $\neg\psi \in \Gamma$，两者必居其一。因此对 $\mathscr{L}$ 的任意公式 $\psi(x_1 \cdots x_n)$，

$$T \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ 或 } T \vdash \varphi \rightarrow \neg\psi$$

两者必居其一，这样 φ 是 T 的完备公式，又由 $T \vdash \varphi \rightarrow \varphi$，必有 $\varphi \in \Gamma$，从而有 $\mathscr{U} \models \varphi[a_1, \cdots, a_n]$。这就说明 $\mathscr{U}$ 是可数原子模型。

由 (1) (2) (3) 知定理中的三个条件都是充分必要条件。▌

定理 10.1.3 给出了判定一个模型或一个理论是否有可数原子模型或是不是原子理论的方法。

每个有限模型必与其初等等价的模型同构，因此必是素模型也就是原子模型。$\mathscr{L}$ 中没有任何非逻辑符号时，每个可数模型都可以嵌入与之初等等价的模型，因而也是原子模型。

$\mathscr{U}=\langle Q, \leqslant\rangle$ 是无端点稠密线性序理论的素模型，因此是原子模型，这样无端点稠密线性序理论是原子理论。不难看出特征 p 的代数闭域理论和特征 0 的代数闭域理论都有素模型，因而都是原子理论。

练习

10.1.1 如果 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 是理论 T 关于变元 $x_1, \cdots, x_n$ 的完备公式，证明 $\exists x_n \varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 是理论 T 的关于变元 $x_1, \cdots, x_{n-1}$ 的完备公式。

10.1.2 设 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{L}$ 的任意可数模型，证明膨胀模型 $(\mathscr{U}, a)_{a\in A}$ 是语言 $\mathscr{L}\cup A$ 的可数原子模型。

10.1.3 设 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{L}$ 的可数原子模型，D 是 Lindenbaim 代数 $B(\mathrm{Th}(\mathscr{U}))$ 的任意一个滤集，证明 D 可以扩充到 $B(\mathrm{Th}(\mathscr{U}))$ 的一个主滤集，即 $B(\mathrm{Th}\mathscr{U})$ 的每个超滤集都是主滤集。

10.1.4 设 T 是 $\mathscr{L}$ 的完全理论，如果 T 的 Lindenbaum 代数 $B(T)$ 的每个滤集都是主滤集，证明 T 有模型实现与 T 和谐的每个和谐的公式集。

§10.2 可数地饱和模型

设 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{L}$ 的模型，$Y\subset A$ 是论域 A 的子集，记 $\mathscr{L}_Y=\mathscr{L}\cup Y$，$\mathscr{U}_Y=(\mathscr{U}, a)_{a\in Y}$，分别是 $\mathscr{L}$ 和 $\mathscr{U}$ 的膨胀语言和膨胀模型。

模型 $\mathscr{U}$ 称为**可数地饱和模型**，如果 $\mathscr{U}$ 是可数模型，且对任意有限子集 $Y\subset A$，与 $\mathrm{Th}(\mathscr{U}_Y)$ 和谐的每个公式集 $\Gamma(x)$，都在 $\mathscr{U}_Y$ 中被实现。

注意 $\Gamma(x)$ 是膨胀语言 $\mathscr{L}_Y$ 的公式集，容易看出如果 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{L}$ 的可数地饱和模型。则对任意有限子集 $Y\subset A$，$\mathscr{U}_Y$ 是 $\mathscr{L}_Y$ 的可数地饱和模型，但并非每个可数模型都是可数地饱和模型. 例如 Peano 算术的标准模型 $\mathscr{U}$ 不是可数地饱和模型. 因为对 $\varnothing\subset A$，与 $\mathrm{Th}(\mathscr{U})$ 和谐的型 $\Gamma(x)=\{x\neq 0, x\neq S0, x\neq SS0, \cdots\}$ 在 $\mathscr{U}$ 中不被实现。

设 $\Sigma(x_1, \cdots, x_n)$ 是语言 $\mathscr{L}$ 的公式集，$\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 是 $\mathscr{L}$ 的一个公式，称 φ 是 Σ 的一个推论，记作 $\Sigma \models \varphi$，如果对任意模型 $\mathscr{U}$，任意 n 元组 $a_1, \cdots a_n \in A$ 如果 $\mathscr{U} \models \Sigma [a_1, \cdots a_n]$ 就有

$\mathscr{U} \models \varphi [a_1, \cdots, a_n]$

命题 10.2.1 设 $\mathscr{L}' = \mathscr{L} \cup \{c_1, \cdots, c_m\}$ 是 $\mathscr{L}$ 的膨胀语言，$m < n$，其中 $c_1, \cdots, c_m$ 是互不相同的新常量，则 $\Sigma(x_1, \cdots, x_n)$ 是 $\mathscr{L}$ 的型当且仅当 $\Sigma(c_1, \cdots, c_m, x_{m+1}, \cdots, x_n)$ 是 $\mathscr{L}'$ 的型。

证明 容易看出 $\Sigma(x_1, \cdots, x_n)$ 和谐当且仅当 $\Sigma'(c_1, \cdots, c_m, x_{m+1}, \cdots, x_n)$ 和谐，而对每个 $\mathscr{L}$ 公式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$，$\varphi(x_1, \cdots, x_n) \in \Sigma(x_1, \cdots, x_n)$ 当且仅当 $\varphi(c_1, \cdots, c_m, x_{m+1}, \cdots, x_n) \in \Sigma(c_1, \cdots, c_m, x_{m+1}, \cdots, x_n)$，因此 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 与 $\neg\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 恰有一个属于 $\Sigma(x_1, \cdots, x_n)$ 当且仅当 $\varphi(c_1, \cdots, c_m, x_{m+1}, \cdots, x_n)$ 与 $\neg\varphi(c_1, \cdots, c_m, x_{m+1}, \cdots, x_n)$ 恰有一个属于 $\Sigma(c_1, \cdots, c_m, x_{m+1}, \cdots, x_n)$. ▌

命题 10.2.2 设模型 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{L}$ 的可数地饱和模型，对任意有限子集 $Y \subset A$，对 $\mathscr{L}_Y$ 的任意公式集 $\Gamma(x_1, \cdots, x_n)$，如果 Γ 与 $\mathrm{Th}(\mathscr{U}_Y)$ 和谐，则 Γ 被 $\mathscr{U}_Y$ 实现。

证明 对型 $\Gamma(x_1, \cdots, x_n)$ 的变元个数 n 归纳. $n=1$ 时由可数地饱和模型的定义知结论成立. 设变元个数为 $n-1$ 时结论成立. 令 $\Gamma(x_1, \cdots, x_n)$ 与 $\mathrm{Th}(\mathscr{U}_Y)$ 和谐。不妨假设 Γ 对合取封闭。令 $\Gamma'(x_1, \cdots, x_{n-1}) = \{\exists x_n \gamma(x_1, \cdots, x_n): \gamma \in \Gamma\}$。

则 Γ' 与 $\mathrm{Th}(\mathscr{U}_Y)$ 也和谐，由归纳假设存在 $a_1, \cdots, a_{n-1} \in A$ 使 $\mathscr{U}_Y \models \Gamma'[a_1, \cdots, a_{n-1}]$.

令 $Y' = Y \cup \{a_1, \cdots, a_{n-1}\}$，则 Y' 仍是 A 的有限子集。$\Gamma(a_1, \cdots, a_{n-1}, x_n)$ 与 $\mathrm{Th}(\mathscr{U}_{Y'})$ 也和谐，因为对任意有限多个公式 $\gamma_1(a_1, \cdots, a_{n-1}, x_n), \cdots, \gamma_m(a_1, \cdots, a_{n-1}, x_n) \in \Gamma(a_1, \cdots, a_{n-1}, x_n)$，有 $\gamma_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, \gamma_m(x_1, \cdots, x_n) \in \Gamma$，因此

$\exists x_n(\gamma_1\wedge\cdots\wedge\gamma_m)\in\Gamma'(x_1, \cdots, x_{n-1})$，从而有

$\mathscr{U}_{Y'}\models\exists x_n(\gamma_1(a_1,\cdots,a_{n-1},x_n)\wedge\cdots\wedge\gamma_m(a_1,\cdots,a_{n-1},x_n))$这样 $\mathrm{Th}(\mathscr{U}_Y')$与$\Gamma(a_1,\cdots,a_{n-1},x_n)$的任意有限子集和谐，因此 $\mathrm{Th}\ (\mathscr{U}_Y')$与$\Gamma(a_1,a_{n-1},x_n)$和谐。

再由$\mathscr{U}$是可数地饱和模型，知存在$a_n\in A$，使

$\mathscr{U}_Y'\models\Gamma\ [a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n]$。

这就也有$\mathscr{U}_Y\models\Gamma\ [a_1, \cdots a_n]$。 ▌

定理 10.2.2 把可数地饱和模型定义中单个变元的公式集$\Gamma(x)$推广到任意有限多个变元的公式集$\Gamma(x_1, \cdots, x_n)$.

定理 10.2.3 **（可数地饱和模型的存在定理）** 令T是完全理论，T有可数地饱和模型当且仅当对每个$n<\omega$，T只有可数多个n变元的型。

证明 设T有可数地饱和模型$\mathscr{U}$，由命题 10.2.2，每个与T和谐的n变元的型都在$\mathscr{U}$中被实现。但$\mathscr{U}$的论域A的每个n元组只能实现唯一一个型，而可数集A只有可数多个n元组. 因此T至多只有可数多个n变元的型。

反过来，对每个$n<\omega$，设只有可数多个n变元的型与T和谐。我们来构造T的可数地饱和模型。

令$\mathscr{L}'=\mathscr{L}\cup C$，其中$C=\{c_1, c_2, \cdots\}$是可数新常量集，设$Y\subset C$，$Y=\{d_1, \cdots, d_n\}$是$C$的有限子集，$T$在$\mathscr{L}_Y$中的一个型$\Gamma(x)$即$\Gamma(d_1,\cdots,d_n,x)$对应$T$在$\mathscr{L}$中的一个型$\Gamma(x_1,\cdots,x_n,x)$，由于$T$在$\mathscr{L}$中至多有可数多个型，因此对每个有限子集$Y\subset C$，$T$在$\mathscr{L}_Y$中也至多只有可数多个型，而$C$的有限子集$Y$也只有可数多个，因此对所有有限子集$Y\subset C$，所有的与$T$和谐的$\mathscr{L}_Y$的型共有至多可数多个，我们全部将其枚举如下：

$\Gamma_1(x),\Gamma_2(x),\Gamma_3(x),\cdots$

再枚举$\mathscr{L}'$的全部句子

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \cdots$

归纳地构造 $\mathscr{L}'$ 的理论的递增序列：

$$T=T_0\subset T_1\subset T_2\subset T_3\subset\cdots$$

使对每个 $m<\omega$，有

(1) T_m 和谐，T_m 中只含有限多个 C 的新常量；

(2) $\varphi_m\in T_{m+1}$ 或 $\neg\varphi_m\in T_{m+1}$；

(3) 若 $\varphi_m=\exists x\psi(x)\in T_{m+1}$，则有 $c\in C$，c 不在 T_m 与 φ_m 中出现，使 $\psi(c)\in T_{m+1}$；

(4) 若 $\Gamma_m(x)$ 与 T_{m+1} 和谐，则有 $d\in C$，d 不在 T_m、φ_m、$\Gamma_m(x)$ 中出现，使 $\Gamma_m(d)\subset T_{m+1}$.

容易证明当 T_m 构造之后可以构造 T_{m+1} 使满足 (1)，(2)、(3) 和 (4)。

令 $T_\omega=\bigcup\limits_{m<\omega}T_m$，则 T_ω 是 $\mathscr{L}'$ 的极大和谐句子集，T_ω 有模型 $(\mathscr{B}, a_0, a_1, \cdots)$ 其中 a_n 是新常量 c_n 的解释。由 (3) 可知以 $A=\{a_0, a_1, \cdots\}$ 为论域可以构成 $(\mathscr{B}, a_0, a_1, \cdots)$ 的子模型 $(\mathscr{U}, a_0, a_1, \cdots)\models T_\omega$，这样 $\mathscr{U}\models T$。容易证明 $\mathscr{U}$ 是可数地饱和模型。 ▌

由定理 10.2.3 容易得到如下推论。

推论 10.2.4 设 $\mathscr{L}$ 的完全理论 T 只有可数多个不同构的可数模型，则 T 有可数地饱和模型.

证明 设 $\Gamma(x_1, \cdots, x_n)$ 是 T 的一个型，则一定有可数模型 $\mathscr{U}\models T$，存在 $a_1, \cdots, a_n\in A$，$\mathscr{U}\models\Gamma(a_1, \cdots, a_n)$。每个可数模型至多只能实现可数多个 n 变元的型. 由题设对每个 $n<\omega$，T 只有可数多个 n 变元的型。由定理 10.2.3，T 有可数地饱和模型。▌

与可数原子模型一样，完全理论的可数地饱和模型也是唯一的。

定理 10.2.5 (可数地饱和模型的唯一性定理) 如果 $\mathscr{U}$、$\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{L}$ 的两个可数地饱和模型且 $\mathscr{U}\equiv\mathscr{B}$，则 $\mathscr{U}\cong\mathscr{B}$.

证明 类似原子模型唯一性定理的证明用过来过去法，分别

枚举模型 $\mathscr{U}$、$\mathscr{B}$ 的论域 A、B：

$a_0, a_1, a_2, \cdots$

$b_0, b_1, b_2, \cdots$

令 $C=\{c_0, c_1, \cdots\}$ 是可数新常量集. 令 $a_0'=a_0$, $\Gamma_0(x_0)=\{\varphi(x_0) : \mathscr{U}\models\varphi(a_0)\}$，则 $\Gamma_0(x_0)$是 $\mathrm{Th}(\mathscr{U})$ 的一个型，由于$\mathscr{U}\equiv\mathscr{B}$. $\mathrm{Th}(\mathscr{U})=\mathrm{Th}(\mathscr{B})$. $\Gamma_0(x_0)$ 也是 $\mathrm{Th}(\mathscr{B})$ 的型. 而 $\mathscr{B}$ 是可数地饱和模型，必实现 $\Gamma_0(x_0)$，即存在 $b\in B$，使$\mathscr{B}\models\Gamma_0[b]$，取第一个这样的 b 为 b_0'，令 $\mathscr{L}_0=\mathscr{L}\cup\{c_0\}$，在模型 $\mathscr{U}$、$\mathscr{B}$ 中分别以 a_0'，b_0' 解释 c_0，得到膨胀模型 $(\mathscr{U}, a_0')$，$(\mathscr{B}, b_0')$，易见仍有$(\mathscr{U}, a_0')\equiv(\mathscr{B}, b_0')$且都是可数地饱和模型.

现在取 B 中未用过的第一个元素为 b_1'，同样存在 $a\in A$，取第一个为 a_1'，使对膨胀语言 $\mathscr{L}_1=\mathscr{L}\cup\{c_0,c_1\}=\mathscr{L}_0\cup\{c_1\}$，有 $(\mathscr{U}, a_0', a_1')\equiv(\mathscr{B}, b_0', b_1')$，这时 $(\mathscr{U}, a_0', a_1')$，$(\mathscr{B}, b_0', b_1')$ 还是可数地饱和模型。

往返重复这个过程可得到 A、B 的重排

$a_0', a_1', a_2', \cdots$

$b_0', b_1', b_2', \cdots$

使 $(\mathscr{U}, a_0', a_1', \cdots)\equiv(\mathscr{B}, b_0', b_1', \cdots)$。这时模型 $\mathscr{U}$、$\mathscr{B}$ 中元素都是 $\mathscr{L}\cup\{c_0, c_1, \cdots\}$ 中常量的解释，因此有

$f:(\mathscr{U}, a_0', a_1', \cdots)\cong(\mathscr{B}, b_0', b_1', \cdots)$，对任意 $n<\omega$，$f(a_n')=b_n'$。这样当然有 $\mathscr{U}\cong\mathscr{B}$. ▌

与上一节中素模型对偶的概念是**万有模型**。称 $\mathscr{L}$ 的可数模型 $\mathscr{U}$ 是**可数地万有模型**，如果对 $\mathscr{L}$ 的任意可数模型 $\mathscr{B}$，$\mathscr{B}\equiv\mathscr{U}$ 则 $\mathscr{B}\preccurlyeq\mathscr{U}$. 可数地万有模型可以看成是一种最大的可数模型，它能包含与之初等等价的全体可数模型。

定理 10.2.6 $\mathscr{L}$ 的每个可数地饱和模型都是可数万有模型。

证明 设 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{L}$ 的可数地饱和模型，$\mathscr{B}$ 是可数模型，

$\mathscr{U}\equiv\mathscr{B}$，枚举 $\mathscr{B}$ 的论域 B 为

$$b_0, b_1, b_2, \cdots$$

用单向的过来过去法可以得到 $\mathscr{U}$ 的一个元素列

$$a_0, a_1, a_2, \cdots$$

使对任意 $n<\omega$，$(\mathscr{U}, a_0, \cdots, a_n)\equiv(\mathscr{B}, b_0, \cdots, b_n)$。因此有 $(\mathscr{U}, a_0, a_1, \cdots)\equiv(\mathscr{B}, b_0, b_1, \cdots)$，这样令 $f: \mathscr{B}\to\mathscr{U}$ 对任意 $n<\omega$，$f(b_n)=a_n$，即得 $f: \mathscr{B}\preccurlyeq\mathscr{U}$. ▌

定理 10.2.6 说明可数地饱和模型是可数模型中最大的一个，这样可数地饱和模型与可数原子模型是对偶的概念。

定理 10.2.7 （**ω 范畴特征定理**）设 T 是 $\mathscr{L}$ 的完全理论，则 T 是 ω 范畴理论当且仅当对每个 $n<\omega$，T 只有有限多个变元为 $x_1, \cdots, x_n$ 的型。

证明（⇒） 设 T 是 ω 范畴理论，则 T 只有唯一的可数模型。由推论 10.2.4 T 有可数地饱和模型，但这唯一的可数模型必是素模型. 因而又是可数原子模型。这样 T 有一个既是可数地饱和又是可数原子的模型 $\mathscr{U}$.

设 $\Gamma(x_1, \cdots, x_n)$ 是 T 的自由变元为 $x_1, \cdots, x_n$ 的型. 由于 $\mathscr{U}$ 是 T 的可数地饱和模型. Γ 必在 $\mathscr{U}$ 中被实现，即存在 $a_1, \cdots, a_n\in A$. 使 $\mathscr{U}\models\Gamma[a_1, \cdots, a_n]$. 又由于 $\mathscr{U}$ 是原子模型. 因此存在 T 的一个完备公式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$，使 $\mathscr{U}\models\varphi[a_1, \cdots, a_n]$，这样必有 $\varphi\in\Gamma$。由此知对每个 $n<\omega$，每个型 $\Gamma(x_1, \cdots, x_n)$ 中都含有一个完备公式.

令 $\Sigma(x_1,\cdots,x_n)=\{\neg\varphi(x_1,\cdots,x_n): \varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 是 T 的完备公式$\}$. 由于公式集 $\Sigma(x_1, \cdots, x_n)$ 不含 T 的任何完备公式，$\Sigma(x_1, \cdots, x_n)$不能扩充成为 T 的型，这就是说 $\Sigma(x_1, \cdots, x_n)$ 与 T 不和谐. 这样必有有限子集，$\{\neg\varphi_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, \neg\varphi_m(x_1,\cdots,x_n)\}\subset\Sigma(x_1,\cdots,x_n)$与 T 不和谐，因此

$T\models\neg(\neg\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_m)$，$T\models\varphi_1\vee\cdots\vee\varphi_m$.

令 $\Gamma_i(x_1,\cdots,x_n)=\{\psi(x_1,\cdots,x_m): T\models\varphi_i\rightarrow\psi\}$. 由于 φ_i 是 T 的完备公式，$\Gamma_i(x_1, \cdots, x_n)$ 是与 T 和谐的型，我们证明与 T 和谐的自由变元为 $x_1, \cdots, x_n$ 的型只有 $\Gamma_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,\Gamma_m(x_1,\cdots,x_n)$这 m 个.

设 $\Gamma(x_1, \cdots, x_n)$ 是与 T 和谐的一个型. 则 Γ 在 $\mathscr{U}$ 中必被实现，因此有 $a_1, \cdots, a_n\in A$，使 $\mathscr{U}\models\Gamma[a_1, \cdots, a_n]$

由 $T\models\varphi_1\vee\cdots\vee\varphi_m$，必有 $i\leqslant m$，使 $\mathscr{U}\models\varphi_i[a_1, \cdots, a_n]$，易见有 $\mathscr{U}\models\Gamma_i[a_1, \cdots, a_n]$

这就得到 $\Gamma(x_1,\cdots,x_n)=\Gamma_i(x_1,\cdots,x_n), i\leqslant m$。

($\Leftarrow$)　设对每个 $n<\omega$, T 只有有限多个变元为 $x_1, \cdots, x_n$ 的型，令 $B_n(T)$ 是 T 在 $\text{Form}_n(\mathscr{L})$ 上的 Lindenbaun 代数，T 的每个 n 变元的型都对应 $B_n(T)$ 中一个超滤. 因此 $B_n(T)$ 上只有有限多个超滤. 对每个公式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$，令

$\hat{\varphi}=\{D: D$ 是 $B_n(T)$上超滤，$|\varphi|\in D\}$。

对任意 $\varphi,\psi\in\text{Form}_n(\mathscr{L})$若$|\varphi|\neq|\psi|$,则必有 $\hat{\varphi}\neq\hat{\psi}$ 因而有超滤 D，使 $|\varphi|\in D$, $|\psi|\notin D$ 或 $|\psi|\in D$, $|\varphi|\notin D$. 由于 $B_n(T)$ 上只有有限多个超滤，因此只有有限多个互不相同的 $\hat{\varphi}$. 这样 $B_n(T)$ 是有限布尔代数，易见 $B_n(T)$ 上每个超滤都是主超滤.

设 $\Gamma(x_1, \cdots, x_n)$ 是与 T 和谐的一个型. Γ 对应 $B_n(T)$ 中一个由 $|\varphi|$生成的主超滤. 对任一公式 $\psi\in\text{Form}_n$ ($\mathscr{L}$)，有 $\psi\in\Gamma$ 或 $\neg\psi\in\Gamma$，因此有 $|\varphi|\leqslant|\psi|$，或 $|\varphi|\leqslant|\neg\psi|$。这样 $T\models\varphi\rightarrow\psi$ 或 $T\models\varphi\rightarrow\neg\psi$, 必有一个成立。这就是说 φ 是 T 的完备公式，T 的每个型中都含有 T 的完备公式.

设 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{L}$ 的模型，$\mathscr{U}\models T$，对任意元素 $a_1, \cdots, a_n\in A$，令 $\Gamma(x_1, \cdots, x_n)$ 是 $\mathscr{U}$ 的由 $a_1, \cdots, a_n$ 实现的型. 则必有完备公式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)\in\Gamma$，使 $\mathscr{U}\models[a_1, \cdots, a_n]$。

这样 T 的每个可数模型都是可数原子模型.

由于 T 是完全理论，T 的任意模型都初等等价，而初等等价

的可数原子模型都同构，因此即 T 是 ω-范畴理论。 ▌

现在我们知道可数语言的完全理论 T 如果有可数多个型，则 T 有可数地饱和模型. 如果对每个 $n<\omega$,T 至多有有限多个型，则 T 是 ω 范畴理论，反之亦真。下面定理给出可数地饱和模型和可数原子模型的关系。

定理 10.2.8 设 T 是可数语言 $\mathscr{L}$ 的完全理论，如果 T 有可数地饱和模型，则 T 是可数原子理论，因此 T 有可数原子模型。

证明 设 T 不是原子理论，则存在与 T 和谐的公式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 不可完备化. 当然 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 不是 T 的完备公式，这就存在公式 $\psi(x_1, \cdots, x_n)$ 使

$$T\vdash \varphi\rightarrow\psi, \ T\vdash \varphi\rightarrow\neg\psi$$

不是恰有一个成立. 由于 T 与 φ 和谐，上述两式不能都成立. 这样上述两式便都不成立，即

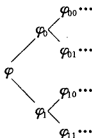
$$T\nvdash \varphi\rightarrow\psi, \ T\nvdash \varphi\rightarrow\neg\psi.$$

于是有 T 与 $\{\varphi、\neg\psi\}$，T 与 $\{\varphi、\psi\}$ 都和谐.

令 $\varphi_0=\varphi\wedge\neg\psi$, $\varphi_1=\varphi\wedge\psi$, φ_0、φ_1 分别都与 T 和谐，又显然有

$$T\vdash \varphi_0\rightarrow\varphi, \qquad T\vdash \varphi_1\rightarrow\varphi,$$

及 φ 不可完备化，知 φ_0，φ_1 也不可完备化。这样对 φ_0，φ_1 可重复以上过程，不断重复可得到一树形：



对每个由 0, 1 构成的无限序列 i_0, i_1, i_2, …, 对应于该树的一个枝 $\{\varphi_{i_0}, \varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, \cdots\}$。这个公式集的每个公式都与 T 和谐，且

$T \models \varphi_{i_k} \to \varphi_{i_l}$，只要$k>l$。这样这一枝的每个有限子集都与$T$和谐，因而 $\{\varphi_{i_0}, \varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, \cdots\}$ 与 T 和谐，然而对于任意两个不同的序列 $\{i_0, i_1, i_2, \cdots\}$ 与 $\{j_0, j_1, j_2, \cdots\}$，必有第一个 $k<\omega$，使$i_k \neq j_k$，而 $i_l = j_l$，$l<k$，由树的构造知有某个公式 $\theta(x_1, \cdots, x_n)$，使

$$\varphi_{i_k} = \varphi_{i_{k-1}} \wedge \theta \qquad \varphi_{j_k} = \varphi_{j_{k-1}} \wedge \neg\theta。$$

因此 φ_{i_k}与 φ_{j_k}不和谐。这样以上构造的树每个枝都与 T 和谐，而任意两个枝都与 T 不和谐。

由于无穷长的0，1序列共有2^ω个，因此T有2^ω个不同的型。由于2^ω不可数，T有不可数多个型，因此T没有可数地饱和模型。▎

最后用模型论中一个非常有趣的定理来结束本节。

定理 10.2.9 **（Vaught 定理）** 不存在恰有两个不同构的可数模型的完全理论。

证明 设 T 是完全理论，T 恰有两个不同构的可数模型。则 T 有可数地饱和模型 $\mathscr{B}$，也有可数原子模型 $\mathscr{U}$，且 $\mathscr{U} \not\cong \mathscr{B}$。则 $\mathscr{B}$ 不是原子模型，因此存在 $b_1, \cdots, b_n \in B$，不满足 T 的任意完备公式。

令 $\mathscr{L}' = \mathscr{L} \cup \{b_1, \cdots, b_n\}$。由 $\mathscr{B}$ 是可数地饱和模型，知膨胀模型 $(\mathscr{B}, b_1, \cdots, b_n)$ 也是可数地饱和模型。令 $T' = \mathrm{Th}(\mathscr{B}, b_1, \cdots, b_n)$，则 T' 是 $\mathscr{L}'$ 的完全理论有可数地饱和模型，因此有可数原子模型，设为 $\mathscr{C}' = (\mathscr{C}, c_1, \cdots, c_n)$，$\mathscr{C}'$ 的 $\mathscr{L}$ 归纳 $\mathscr{C} \models T$，但由于 $(\mathscr{B}, b_1, \cdots, b_n) \equiv (\mathscr{C}, c_1, \cdots, c_n)$，$c_1, \cdots, c_n$ 与 $b_1, \cdots, b_n$ 满足同样的 $\mathscr{L}$ 公式。因此 $c_1, \cdots, c_n$ 也不满足 T 的任何完备公式，这样 $\mathscr{C}$ 不是 T 的可数原子模型。我们还要证明 $\mathscr{C}$ 不是 T 的可数地饱和模型。

由 T 不是 ω 范畴理论，因此由定理 10.2.7 的证明 $B_n(T)$ 是无限布尔代数，但由 $T \subset T'$ 易得 $B_n(T)$ 是 $B_n(T')$ 的子布尔代数。因此 $B_n(T')$ 也是无限布尔代数，这样 T' 必不是 ω 范畴理论，从

而 T' 不可能有既是可数地饱和又是可数原子的模型。这样 $\mathscr{C}$ 也就不可能是 T 的可数地饱和模型，于是 $\mathscr{U}\not\cong\mathscr{C}$，同样 $\mathscr{B}\not\cong\mathscr{C}$，得到矛盾。 ▌

练习

10.2.1 证明可数语言的完备理论 T 若有可数万有模型，则 T 有可数地饱和模型。

10.2.2 设 $\mathscr{U}$ 是可数模型，则 $\mathscr{U}$ 是可数地饱和模型当且仅当对每个有限子集 $Y\subset A$，$\mathscr{U}_Y$ 是可数万有模型。

10.2.3 设 $\mathscr{L}'$ 是 $\mathscr{L}$ 的膨胀语言，$\mathscr{U}'$ 是 $\mathscr{L}'$ 的可数地饱和模型. 证明 $\mathscr{U}'$ 的 $\mathscr{L}$ 归约 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{L}$ 的可数地饱和模型。

§10.3 可数地齐次模型

设 $\mathscr{U}$ 是可数语 $\mathscr{L}$ 的模型，称 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{L}$ 的**可数地齐次模型**，如果 $\mathscr{U}$ 是可数模型并且对 $\mathscr{U}$ 的论域 A 中任意两个有限序列 a_1，$\cdots$，a_n，a_{n+1} 和 b_1，b_2，$\cdots$，b_n，如果
$(\mathscr{U}, a_1, \cdots, a_n)\equiv(\mathscr{U}, b_1, \cdots, b_n)$，就一定存在元素 $b_{n+1}\in A$，使 $(\mathscr{U}, a_1, \cdots, a_n, a_{n+1})\equiv(\mathscr{U}, b_1, \cdots, b_n, b_{n+1})$。

命题 10.3.1 如果 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{L}$ 的可数原子模型或可数地饱和模型，则 $\mathscr{U}$ 是可数地齐次模型。

证明 先证明可数原子模型是可数地齐次模型。设 $\mathscr{U}$ 是可数原子模型，a_1，$\cdots$，a_n，a_{n+1}，b_1，$\cdots$，$b_n\in A$，
$(\mathscr{U}, a_1, \cdots, a_n)\equiv(\mathscr{U}, b_1, \cdots, b_n)$。由 $\mathscr{U}$ 是原子模型知存在完全理论 $\mathrm{Th}\mathscr{U}$ 的完备公式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})$，使 $\mathscr{U}\models\varphi[a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}]$。因此 $\mathscr{U}\models\exists x_{n+1}\varphi(a_1, \cdots, a_n, x_{n+1})$，由 $(\mathscr{U}, a_1, \cdots, a_n)\equiv(\mathscr{U}, b_1, \cdots, b_n)$，有

$\mathscr{U}\models\exists x_{n+1}\varphi(b_1, \cdots, b_n, x_{n+1})$。这样存在元素$b\in A$,任取一个叫$b_{n+1}$，使$\mathscr{U}\models\varphi[b_1, \cdots, b_n, b_{n+1}]$。我们证明
$(\mathscr{U}, a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}) \equiv (\mathscr{U}, b_1, \cdots, b_n, b_{n+1})$。设$\psi(x_1, \cdots, x_{n+1})$是$\mathscr{L}$的任意一个公式. 如果
$\mathscr{U}\models\psi(a_1, \cdots, a_{n+1})$，由$\varphi(x_1, \cdots, x_{n+1})$是$\mathrm{Th}\mathscr{U}$的完备公式知必有$\mathrm{Th}\mathscr{U}\vdash\varphi(x_1, \cdots, x_{n+1})\rightarrow\psi(x_1, \cdots, x_{n+1})$，再由
$\mathscr{U}\models\varphi(b_1, \cdots, b_{n+1})$可得$\mathscr{U}\models\psi(b_1, \cdots, b_{n+1})$。这样有
$(\mathscr{U}, a_1, \cdots, a_n, a_{n+1})\equiv(\mathscr{U}, b_1, \cdots, b_n, b_{n+1})$。因此$\mathscr{U}$是可数地齐次模型。

再证可数地饱和模型也是可数地齐次模型。设$\mathscr{U}$是可数地饱和模型，$a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}, b_1, \cdots, b_n\in A$，
$(\mathscr{U}, a_1, \cdots, a_n)\equiv(\mathscr{U}, b_1, \cdots, b_n)$。令$\mathscr{L}'=\mathscr{L}\cup\{a_1, \cdots, a_n\}$，则$(\mathscr{U}, a_1, \cdots, a_n)$也是$\mathscr{L}'$的可数地饱和模型。当用$b_1, \cdots, b_n$解释$\mathscr{L}'$的新常量$a_1, \cdots, a_n$时，$(\mathscr{U}, b_1, \cdots, b_n)$也是$\mathscr{L}'$的可数地饱和模型。设$\Gamma(x)$是$\mathscr{L}'$的一个型，$(\mathscr{U}, a_1, \cdots, a_n)\models\Gamma[a_{n+1}]$。$\Gamma(x)$中公式都是$\varphi(a_1, \cdots, a_n, x)$形，设$\varphi_1(a_1, \cdots, a_n, x), \cdots, \varphi_m(a_1, \cdots, a_n, x)$是$\Gamma(x)$的任意有限个公式，则
$(\mathscr{U}, a_1, \cdots, a_n)\models\varphi_1(a_1, \cdots, a_n, a_{n+1})\wedge\cdots\wedge\varphi_m(a_1, \cdots, a_n, a_{n+1})$。因此有$(\mathscr{U}, a_1, \cdots, a_n)\models\exists x(\varphi_1(a_1,\cdots,a_n,x)\wedge\cdots\wedge\varphi_m(a_1,\cdots,a_n,x))$。这样也有$(\mathscr{U}, b_1, \cdots, b_n)\models\exists x(\varphi_1(b_1,\cdots,b_n,x)\wedge\cdots\wedge\varphi_m(b_1,\cdots,b_n,x))$。从而$\Gamma(x)$与$\mathrm{Th}(\mathscr{U}, b_1, \cdots, b_n)$和谐，因此$\Gamma(x)$在$(\mathscr{U}, b_1, \cdots, b_n)$中也被实现. 这样有$b\in A$，任取一个作$b_{n+1}$，使$(\mathscr{U}, b_1, \cdots, b_n)\models\Gamma[b_{n+1}]$,因此有
$(\mathscr{U}, a_1, \cdots, a_{n+1})\equiv(\mathscr{U}, b_1, \cdots, b_{n+1})$。于是$\mathscr{U}$是$\mathscr{L}$的可数齐次模型。 ▌

定理 10.3.2 每个可数模型都有可数地齐次模型为其初等扩充模型。

证明 设$\mathscr{U}_0$是$\mathscr{L}$的一个可数模型，我们先来构造$\mathscr{L}$的一

个模型$\mathscr{U}_1$，使$\mathscr{U}_0 \prec \mathscr{U}_1$，并且对$A_0$中任意两个有限序列$a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}$；$b_1, \cdots, b_n$，如果

$(\mathscr{U}_0, a_1, \cdots, a_n) \equiv (\mathscr{U}_0, b_1, \cdots, b_n)$ 就有$b_{n+1} \in A_1$，使

$(\mathscr{U}_1, a_1, \cdots, a_{n+1}) \equiv (\mathscr{U}_1, b_1, \cdots, b_{n+1})$。

设$\mathscr{L}' = \mathscr{L} \cup A_0$，$T_0 = \Gamma_{A_0}$，$T_0$是$\mathscr{U}_0$的初等图象。我们适当地膨胀$\mathscr{L}'$，并扩充$T_0$到$T'_0$。对$A_0$中任意两个有限序列$a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}$；$b_1, \cdots, b_n$如果$(\mathscr{U}_0, a_1, \cdots, a_n) \equiv (\mathscr{U}_0, b_1, \cdots, b_n)$就增加一个新常量$c$进入$\mathscr{L}'$，设$\Sigma(a_1, \cdots, a_n, x)$是$\mathscr{L} \cup \{a_1, \cdots, a_n\}$中一个型，$(\mathscr{U}_0, a_1, \cdots, a_n) \models \Sigma(a_1, \cdots, a_n, a_{n+1})$，就把句子集$\Sigma(b_1, \cdots, b_n, c)$的全部句子增加进$T'_0$中。由$\mathscr{U}_0$是可数模型可知$A_0$中元素的有限序列最多有可数多组，因此$\mathscr{L}'$仍是可数语言，由$T_0$的构造也容易看出$T'_0$的任意有限子集必在某模型$(\mathscr{U}_0, a_1, \cdots, a_m)$中可满足，因此$T'_0$是$\mathscr{L}'$的和谐句子集。这样由L—S—T定理$T'_0$有一个可数模型$\mathscr{B}_1$，设$\mathscr{B}_1$在$\mathscr{L}$中的归约模型是$\mathscr{U}_1$，由$\Gamma_{A_0} \subset T'_0$知$\mathscr{U}_0 \prec \mathscr{U}_1$。对任意$a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}$；$b_1, \cdots, b_n \in A_0$，如果$(\mathscr{U}_0, a_1, \cdots, a_n) \equiv (\mathscr{U}_0, b_1, \cdots, b_n)$，则有一个$\mathscr{L} \cup \{a_1, \cdots, a_n\}$的型$\Sigma(a_1, \cdots, a_n, x)$，有一个常量$c \in \mathscr{L}'$，使$(\mathscr{U}_0, a_1, \cdots, a_n) \models \Sigma(a_1, \cdots, a_n, a_{n+1})$，$\Sigma(b_1, \cdots, b_n, c) \subset T_0$，这样有$\mathscr{U}_1 \models \Sigma(b_1, \cdots, b_n, c)$. 称$c$在$A_1$中的解释为$b_{n+1}$，则有$(\mathscr{U}_1, b_1, \cdots, b_n) \models \Sigma(b_1, \cdots, b_n, b_{n+1})$。这时由$\mathscr{U}_0 \prec \mathscr{U}_1$，有$(\mathscr{U}_1, a_1, \cdots, a_n) \models \Sigma(a_1, \cdots, a_n, a_{n+1})$，从而得到

$(\mathscr{U}_1, a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}) \equiv (\mathscr{U}_1, b_1, \cdots, b_n, b_{n+1})$。

重复进行上述过程，我们得到一个初等链：

$$\mathscr{U}_0 \prec \mathscr{U}_1 \prec \mathscr{U}_2 \prec \cdots \prec \mathscr{U}_m \prec \cdots \qquad m < \omega$$

对任$m < \omega$，A_m可数，A_m中任意有限序列$a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}$，$b_1, \cdots, b_n$，如果$(\mathscr{U}_m, a_1, \cdots, a_n) \equiv (\mathscr{U}_m, b_1, \cdots, b_n)$，就有$b_{n+1} \in A_{m+1}$，使

$(\mathscr{U}_{m+1}, a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}) \equiv (\mathscr{U}_{m+1}, b_1, \cdots, b_n, b_{n+1})$。令 $\mathscr{U}_\omega = \bigcup_{m<\omega} \mathscr{U}_m$。由初等链定理有 $\mathscr{U}_0 \prec \mathscr{U}_\omega$。易见 $\mathscr{U}_\omega$ 仍是可数模型。对任意有限序列 $a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}, b_1, \cdots, b_n \in A_\omega$，如果 $(\mathscr{U}_\omega, a_1, \cdots, a_n) \equiv (\mathscr{U}_\omega, b_1, \cdots, b_n)$，必有 $m<\omega$ 使 $a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}, b_1, \cdots, b_n \in A_m$，由 $\mathscr{U}_m \prec \mathscr{U}_\omega$. 有
$(\mathscr{U}_m, a_1, \cdots, a_n) \equiv (\mathscr{U}_m, b_1, \cdots, b_n)$，因此存在 $b_{n+1} \in A_{m+1}$ 使 $(\mathscr{U}_{m+1}, a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}) \equiv (\mathscr{U}_{m+1}, b_1, \cdots, b_n, b_{n+1})$. 于是有 $(\mathscr{U}_\omega, a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}) \equiv (\mathscr{U}_w, b_1, \cdots, b_n, b_{n+1})$，因此 $\mathscr{U}_\omega$ 是可数地齐次模型，$\mathscr{U}_0 \prec \mathscr{U}_\omega$。 ▌

命题 10.3.3 设 $\mathscr{U}$ 是一个可数地齐次模型，$a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n \in A$，$(\mathscr{U}, a_1, \cdots, a_n) \equiv (\mathscr{U}, b_1, \cdots, b_n)$。则存在 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{U}$ 上的一个自同构映射 h：使对 $i=1, \cdots, n$，有 $h(a_i)=b_i$。

证明 给出 A 的两个枚举分别把 $a_1, \cdots, a_n$; $b_1, \cdots, b_n$ 列于最前面：

$$A:\quad \begin{array}{ll} a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}, \cdots, a_m, \cdots & (1) \\ b_1, \cdots, b_n, b_{n+1}, \cdots, b_m, \cdots & (2) \end{array}$$

我们用过来过去法给出这两列元素的重排：

$$a'_1, \cdots, a'_n, a'_{n+1}, \cdots, a'_m, \cdots \qquad (1')$$

$$b'_1, \cdots, b'_n, b'_{n+1}, \cdots, b'_m, \cdots \qquad (2')$$

令 $a'_1=a_1, \cdots, a'_n=a_n$; $b'_1=b_1, \cdots, b'_n=b_n$. 令 $a'_{n+1}=a_{n+1}$，取 b'_{n+1} 为某个 b_m 使 $(\mathscr{U}, a'_1, \cdots, a'_{n+1}) \equiv (\mathscr{U}, b'_1, \cdots, b'_{n+1})$。令 b'_{n+2} 为元素列 (2) 中未用过的最前面的一个元素，取 a'_{n+2} 为某个 a_m，使 $(\mathscr{U}, a'_1, \cdots, a'_{n+2}) \equiv (\mathscr{U}, b'_1, \cdots, b'_{n+2})$. 由 $\mathscr{U}$ 是可数地齐次模型，上述构造可行且可以不断重复。这样 A 的元素列 (1′)，(2′) 就可以构造出来，使对任意 $m<\omega$，有

$(\mathscr{U}, a'_1, \cdots, a'_m) \equiv (\mathscr{U}, b'_1, \cdots, b'_m)$

令 $h: A \to A$，对任 $m<\omega$，$h(a'_m)=b'_m$，易见对任何公式 $\varphi(x_1, \cdots, x_m) \in \mathscr{L}$，有

$\mathscr{U} \models \varphi\,[a_1', \cdots, a_m']$ 当且仅当 $\mathscr{U} \models \varphi\,[b_1', \cdots, b_m']$

这样 h 必是 $\mathscr{U}$ 的自同构映射，由构造可知 $h(a_1)=b_1, \cdots, h(a_n)=b_n$. ▌

命题 10.3.4 可数地齐次模型的可数初等链的并仍是可数地齐次模型。

证明 设 $\mathscr{U}_n$, $n<\omega$, 是模型的初等链，对每个 $n<\omega$, $\mathscr{U}_n$ 是可数地齐次模型。令 $\mathscr{U}_\omega=\bigcup\limits_{n<\omega}\mathscr{U}_n$，则 $\mathscr{U}_\omega$ 仍是可数模型。对任意有限序列 $a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}$; $b_1, \cdots, b_n \in A_\omega$，如果 $(\mathscr{U}_\omega, a_1, \cdots, a_n) \equiv (\mathscr{U}_\omega, b_1, \cdots, b_n)$，易见存在 $m<\omega$，使 $a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}; b_1, \cdots, b_n \in A_m$。由于 $\mathscr{U}_n$, $n<\omega$, 是初等链，$\mathscr{U}_m \prec \mathscr{U}_\omega$，因此有 $(\mathscr{U}_m, a_1, \cdots, a_n) \equiv (\mathscr{U}_m, b_1, \cdots, b_n)$，再由 $\mathscr{U}_m$ 是可数地齐次模型，存在 $b_{n+1} \in A_m$，使

$$(\mathscr{U}_m, a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}) \equiv (\mathscr{U}_m, b_1, \cdots, b_n, b_{n+1})。$$

这样，$b_{n+1} \in A_\omega$, $(\mathscr{U}_\omega, a_1, \cdots, a_{n+1}) \equiv (\mathscr{U}_\omega, b_1, \cdots, b_n, b_{n+1})$。因此 $\mathscr{U}_\omega$ 是可数地齐次模型。 ▌

定理 10.3.5 两个可数地齐次模型同构当且仅当它们实现的有限变元的型完全一样。

证明 设 $\mathscr{U}$、$\mathscr{B}$ 都是 $\mathscr{L}$ 的可数地齐次模型。如果 $\mathscr{U} \cong \mathscr{B}$，则显然 $\mathscr{U}$ 实现的型与 $\mathscr{B}$ 实现的型一样。反过来设 $\mathscr{U}$, $\mathscr{B}$ 实现的型一样，则显然有 $\mathscr{U}$、$\mathscr{B}$ 实现相同的句子集，即 $\mathscr{U} \equiv \mathscr{B}$。分别列出论域 A、B 的元素：

$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$

$b_0, b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots \qquad n<\omega$

用过来过去法给出 A、B 的新的枚举：

$a_0', a_1', \cdots, a_n', \cdots$

$b_0', b_1', \cdots, b_n', \cdots \qquad n<\omega$

先取 $a_0'=a_0$，设 $\Gamma(x)$ 是 $\mathscr{L}$ 的一个单变元的型，$\mathscr{U} \models \Gamma(a_0')$，

则 $\Gamma(x)$在 $\mathscr{B}$ 中也被满足，取 b_0' 为某个 b_n，使 $\mathscr{B}\models\Gamma(b_0')$。令 $\mathscr{L}_1=\mathscr{L}\cup\{c_0\}$，则膨胀模型 $(\mathscr{U}, a_0')$，$(\mathscr{B}, b_0')$ 实现 $\mathscr{L}_1$ 中相同的句子集，因此 $(\mathscr{U}, a_0')\equiv(\mathscr{B}, b_0')$。再取 b_1' 为 B 中未取过的第一个元素 b_n，设 $\Gamma(x_0, x_1)$ 为 $\mathscr{L}$ 的一个二变元的型，$\mathscr{B}\models\Gamma(b_0', b_1')$。由假设存在 A 中元素 a_m，a_n，使 $\mathscr{U}\models\Gamma(a_m, a_n)$。令 $\mathscr{L}_2=\mathscr{L}\cup\{c_0, c_1\}$，则 $(\mathscr{U}, a_m, a_n)\equiv(\mathscr{B}, b_0', b_1')$。因此 $(\mathscr{U}, a_m)\equiv(\mathscr{B}, b_0')$，从而 $(\mathscr{U}, a_0')\equiv(\mathscr{U}, a_m)$. 由 $\mathscr{U}$ 是可数地齐次模型，$\mathscr{U}$ 中存在某个元素 a_k 使 $(\mathscr{U}, a_0', a_k)\equiv(\mathscr{U}, a_m, a_n)$。令 $a_1'=a_k$，则有 $(\mathscr{U}, a_0', a_1')\equiv(\mathscr{U}, a_m, a_n)$，又有 $(\mathscr{U}, a_0', a_1')\equiv(\mathscr{B}, b_0', b_1')$。由于 $\mathscr{U}$、$\mathscr{B}$ 都是可数地齐次模型，这一过程可以不断反复进行，从而得到所求的新枚举，而且使对任意 $n<\omega$，有

$$(\mathscr{U}, a_0', a_1', \cdots, a_n')\equiv(\mathscr{B}, b_0', b_1', \cdots, b_n')$$

这样令 h 是 A 到 B 上的一个映射，使对任意的 $n<\omega$，$h(a_n')=b_n'$，易见 h 是模型 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{B}$ 的同构映射。 ▌

定理 10.3.6 两两同构的可数地齐次模型的可数初等链的并与链中每个模型都同构。

证明 设 $\mathscr{U}_n$，$n<\omega$，是一个可数初等链，对任意 $n<\omega$，$\mathscr{U}_n$ 都是可数地齐次模型。令 $\mathscr{U}=\bigcup_{n<\omega}\mathscr{U}_n$，则对每个 $n<\omega$，$\mathscr{U}_n\prec\mathscr{U}$。设 $\Gamma(x_1, \cdots, x_n)$是 $\mathscr{L}$ 的一个 n 变元的型，如果存在 $a_1, \cdots, a_n\in A$，使$\mathscr{U}\models\Gamma(a_1, \cdots, a_n)$，则存在 $m<\omega$，使 $a_1, \cdots, a_n\in A_m$，由 $\mathscr{U}_m\prec\mathscr{U}$ 有 $\mathscr{U}_m\models(a_1, \cdots, a_m)$. 这就是说能被 $\mathscr{U}$ 实现的型，必能被某个 $\mathscr{U}_m$ 实现，反过来能被某个 $\mathscr{U}_m$ 实现的型，显然能被 $\mathscr{U}$ 实现。但由于 $\mathscr{U}_n$，$n<\omega$，中模型两两同构，因此都互相同构，由定理 10.3.5 它们实现的型都一样。这样 $\mathscr{U}$ 实现的型也就与每个 $\mathscr{U}_n$ 实现的型都一样。再由定理 10.3.4，10.3.5 知 $\mathscr{U}$ 与每个 $\mathscr{U}_n$ 同构。 ▌

设$\mathscr{U}$是$\mathscr{L}$的一个模型，$\mathscr{B}\prec\mathscr{U}$. $\mathscr{L}'=\mathscr{L}\cup\{R\}$，$R$是一个不在$\mathscr{L}$中出现的一元关系符号. 令$(\mathscr{U}, B)$是$\mathscr{L}'$的一个模型，即以$B$作一元关系$R$的在$\mathscr{U}$中的解释，我们有如下定理：

定理 10.3.7 设$\mathscr{U}_0$是$\mathscr{L}$的一个可数模型，$\mathscr{B}_0$是$\mathscr{U}_0$的初等子模型，B_0是$\mathscr{B}_0$的论域，则$(\mathscr{U}_0, B_0)$有一个初等扩充模型$(\mathscr{U}, B)$，其中$\mathscr{U}$是可数地齐次模型，由B决定的$\mathscr{U}$的初等子模型$\mathscr{B}$与$\mathscr{U}$同构。

证明 设$\Sigma(x_1, \cdots, x_n)$是$\mathscr{L}$的一个型，

令$\Sigma^R(x_1, \cdots, x_n)=\Sigma(x_1,\cdots,x_n)\cup\{R(x_1),\cdots,R(x_n)\}$，设$\Sigma(x_1, \cdots, x_n)$能被$\mathscr{U}_0$实现，任取$\Sigma(x_1, \cdots, x_n)$的有限子集：$\varphi_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,\varphi_m(x_1,\cdots,x_n)$，有

$\mathscr{U}_0\models\exists x_1\cdots x_n(\varphi_1(x_1,\cdots,x_n)\wedge\cdots\wedge\varphi_m(x_1,\cdots,x_n))$。由$\mathscr{B}_0\prec\mathscr{U}_0$，也有$\mathscr{B}_0\models\exists x_1\cdots x_n(\varphi_1(x_1,\cdots,x_n)\wedge\cdots\wedge\varphi_m(x_1,\cdots,x_n))$，因此有$a_1, \cdots, a_n\in B_0$，使$\mathscr{B}_0\models\varphi_1(a_1, \cdots, a_n)\wedge\cdots\wedge\varphi_m(a_1, \cdots, a_n)$。再由$\mathscr{B}_0\prec\mathscr{U}_0$，有$\mathscr{U}_0\models\varphi_1(a_1, \cdots, a_n)\wedge\cdots\wedge\varphi_m(a_1, \cdots, a_n)$，这样有$(\mathscr{U}_0, B_0)\models\varphi_1(a_1,\cdots,a_n)\wedge\cdots\wedge\varphi_m(a_1,\cdots,a_n)\wedge R(a_1)\wedge\cdots\wedge R(a_n)$。

这就是说$\Sigma^R(x_1, \cdots, x_n)$与$(\mathscr{U}_0, B_0)$的初等图象有限和谐。

我们这样来膨胀语言$\mathscr{L}'=\mathscr{L}\cup\{R\}$，扩充$(\mathscr{U}_0, B_0)$的初等图象$T_0$：对每个型$\Sigma(x_1, \cdots, x_n)$，如果$\mathscr{U}_0$实现$\Sigma$，就添加新常量$c_1, \cdots, c_n$进$\mathscr{L}'$，添加句子集$\Sigma^R(c_1, \cdots, c_n)$中的全部句子到$T_0$中。类似上述证明可知扩充后的理论$T_0$是膨胀后的语言$\mathscr{L}'$的有限和谐理论。由紧致性定理$T_0$有模型。由于可数模型$\mathscr{U}_0$实现的型$\Sigma$最多只有可数多个，因此$\mathscr{L}'$仍是可数语言。这样$T_0$有可数模型，其在$\mathscr{L}\cup\{R\}$上的归约设为$(\mathscr{U}', B')$。由$T_0$的构造知$(\mathscr{U}_0, B_0)\prec(\mathscr{U}', B')$且对$\mathscr{L}$的每个型$\Sigma$，如果$\mathscr{U}_0$实现$\Sigma$，则$(\mathscr{U}', B')$实现$\Sigma^R$. 由定理 10.3.2 知存在一个可数地齐次模型$(\mathscr{U}_1, B_1)$，使$(\mathscr{U}', B')\prec(\mathscr{U}_1, B_1)$。这样

$(\mathscr{U}_0, B_0) \prec (\mathscr{U}_1, B_1)$ 且对 $\mathscr{L}$ 的每个型 Σ，如果 $\mathscr{U}_0$ 实现 Σ，则 $(\mathscr{U}_1, B_1)$ 实现 Σ^R.

由于 $\mathscr{B}_0$ 是 $\mathscr{U}_0$ 的初等子模型，我们能够证明由 B_1 也能决定 $\mathscr{U}_1$ 的一个初等子模型。首先 B_1 是 A_1 的子集，B_1 是模型 $\mathscr{U}_1$ 中实现一元关系 R 的元素的集合. 我们证明 B_1 对 $\mathscr{L}$ 的函数和常量封闭：设 F 是 $\mathscr{L}$ 的 n 元函数符号，令

$\varphi_F = \forall x_1 \cdots x_n (R(x_1) \wedge \cdots \wedge R(x_n)) \rightarrow \exists y (F(x_1, \cdots, x_n) \equiv y \wedge R(y))$。由 $\mathscr{B}_0 \prec \mathscr{U}_0$ 知 $(\mathscr{U}_0, B_0) \models \varphi_F$，因此有 $(\mathscr{U}_1, B_1) \models \varphi_F$. 于是 B_1 对函数封闭，同样可证明 B_1 对常量封闭。这样 B_1 可构成 $\mathscr{U}_1$ 的一个子模型 $\mathscr{B}_1$。进一步，设$\psi(x, x_1, \cdots, x_n)$是 $\mathscr{L}$ 的一个公式，令

$\varphi_\psi = \forall x_1 \cdots x_n (R(x_1) \wedge \cdots \wedge R(x_n) \wedge \exists x \psi(x, x_1, \cdots, x_n) \rightarrow \exists x (\psi(x, x_1, \cdots x_n) \wedge R(x)))$。由 $\mathscr{B}_0 \prec \mathscr{U}_0$ 知$(\mathscr{U}_0, \mathscr{B}_0) \models \varphi_\psi$. 因此 $(\mathscr{U}_1, B_1) \models \varphi_\psi$. 因此 $\mathscr{B}_1 \prec \mathscr{U}_1$。现在我们得到对 $\mathscr{L}$ 的每个型 Σ，如果 $\mathscr{U}_0$ 实现 Σ，则 $(\mathscr{U}_1, B_1)$ 实现 Σ^R，因此 $\mathscr{B}_1$ 实现 Σ.

不断重复上述过程得到 $\mathscr{L} \cup \{R\}$ 的一个初等链

$(\mathscr{U}_0, B_0) \prec (\mathscr{U}_1, B_1) \prec (\mathscr{U}_2, B_2) \prec \cdots$

对每个 $n < \omega$，$(\mathscr{U}_n, B_n)$ 是可数地齐次模型，如果 $\mathscr{U}_n$ 实现型 Σ，则 $(\mathscr{U}_{n+1}, B_{n+1})$ 实现型 Σ^R。对每个 $n < \omega$，B_n 可以决定 $\mathscr{U}_n$ 的初等子模型 $\mathscr{B}_n$，因此对每个型 $\Sigma(x_1, \cdots, x_n)$，如果 $\mathscr{U}_n$ 实现 Σ，则 $\mathscr{B}_{n+1}$实现 Σ. 由 $(\mathscr{U}_n, B_n)$ 是可数地齐次模型知 $\mathscr{U}_n$ 和 $\mathscr{B}_n$ 都是可数地齐次模型。

令 $(\mathscr{U}, B) = \bigcup_{n<\omega} (\mathscr{U}_n, B_n)$，由初等链定理知 $(\mathscr{U}_0, B_0) \prec (\mathscr{U}, B)$，因此 B 决定 $\mathscr{U}$ 的初等子模型 $\mathscr{B}$. 由命题 10.3.4 知 $(\mathscr{U}, B)$ 也是可数地齐次模型，因而 $\mathscr{U}$、$\mathscr{B}$ 都是可数地齐次模型. 现在对 $\mathscr{L}$ 的每个型 $\Sigma(x_1, \cdots, x_n)$，如果 $\mathscr{B}$ 实现 Σ，显然有 $\mathscr{U}$ 实现 Σ；反之如果 $\mathscr{U}$ 实现 Σ，则必有某个 $n < \omega$，使 $\mathscr{U}_n$

实现 Σ。这样 $\mathscr{B}_{n+1}$实现 Σ，从而 $\mathscr{B}$ 实现 Σ。因此 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 实现的型完全一样，由定理 10.3.5，$\mathscr{U}\cong\mathscr{B}$. ▌

定理 10.3.7 对证明双基数定理起关键作用，而双基数定理是证明 Morley 定理的重要一步。有兴趣读者请参阅 C. C. Chang，H. J. Keisler著《Model Theory》一书。

现在我们来举一个例子讨论可数地齐次模型。设$\mathscr{L}=\{\leqslant\}$，$N$ 是自然数集合，以 N 上小于等于关系解释"$\leqslant$"，得到 $\mathscr{L}$ 的模型 $\langle N, \leqslant\rangle$。令 T 是模型 $\langle N, \leqslant\rangle$ 满足的 $\mathscr{L}$ 中全体句子的集合，则 T 是 $\mathscr{L}$ 的可数完全理论. T 至少包含下列句子：

(1) $\forall x(x\leqslant x)$

(2) $\forall xy(x\leqslant y\wedge y\leqslant x\rightarrow x\equiv y)$

(3) $\forall xyz(x\leqslant y\wedge y\leqslant z\rightarrow x\leqslant z)$

(4) $\forall xy(x\leqslant y\vee y\leqslant x)$

(5) $\exists!\ x\forall y(x\leqslant y)$　$\exists!$ 表示存在唯一一个.

(6) $\forall x\exists y(x\leqslant y)$

(7) $\forall x\exists y(x\leqslant y\wedge\forall z(x\leqslant z\wedge z\leqslant y\rightarrow x\equiv z\vee z\equiv y))$

(1)，(2)，(3)，(4) 说明 T 是一个线性序理论. (5) 说明有唯一一个左端点. (6) 表示没有右端点. (7) 表示每个元素都有一个直接后继. 这样 T 的模型是一个序型。前面第一段是 $\langle N, \leqslant\rangle$，后面再接上若干个整数序集 $\langle Z, \leqslant\rangle$ 的序型。容易看出$\langle N, \leqslant\rangle$是 T 的素模型，因此是 T 的可数原子模型，当然是 T 的可数地齐次模型. 而 $\langle N, \leqslant\rangle$ 后面接上可数无限多个序型 $\langle Z, \leqslant\rangle$是 T 的最大可数模型，因此是 T 的可数地饱和模型，当然也是 T 的齐次模型. T 还有一个齐次模型是 $\langle N, \leqslant\rangle$，后接一个$\langle Z, \leqslant\rangle$，即 $\mathscr{U}=\langle N\cup Z_1, \leqslant\rangle$。对 A 中任意有限序列 $a_1, \cdots, a_n$，$b_1, \cdots, b_n\in N\cup Z_1$，其中 Z_1 是一个 $\langle Z, \leqslant\rangle$ 序型，$(\mathscr{U}, a_1, \cdots, a_n)\equiv(\mathscr{U}, b_1, \cdots, b_n)$ 当且仅当对任意 i，j $1\leqslant i$，$j\leqslant n$，a_i，a_j 之间间隔 k 个元素或无限多个元素和 b_i，b_j 之间

的间隔对应相同。这样如果$(\mathscr{U},a_1,\cdots,a_n)\equiv(\mathscr{U},b_1,\cdots,b_n)$，对$A$中任意元素$a_{n+1}$，不论$a_{n+1}\in N$，还是$a_{n+1}\in Z_1$，都可以找到$b_{n+1}\in A$，使对任意$i\leqslant n$，$a_{n+1}$，$a_i$之间的间隔与$b_{n+1}$，$b_i$之间的间隔对应相同，这样有$(\mathscr{U}, a_1, \cdots, a_{n+1})\equiv(\mathscr{U}, b_1, \cdots, b_{n+1})$，即$\mathscr{U}$是可数地齐次模型. 除了这三个可数地齐次模型之外$T$没有其他的可数地齐次模型了. 只以一个模型来说明，其他都一样。设$\mathscr{U}$是$\langle N,\leqslant\rangle$后面接两个$\langle Z,\leqslant\rangle$序型，$\mathscr{U}=\langle N\cup Z_1\cup Z_2,\leqslant\rangle$，其中$Z_1$，$Z_2$都是$\langle Z, \leqslant\rangle$的序型，则$\mathscr{U}\models T$，取$a\in Z_1$，$b\in Z_2$，易见$(\mathscr{U}, a)\equiv(\mathscr{U}, b)$，因为$a$，$b$都是前后各有无限多个元素. 而这里找不到$c\in A$，使$(\mathscr{U}, a, b)\equiv(\mathscr{U}, b, c)$，这样$\mathscr{U}$不再是可数地齐次模型了。

练习

10.3.1 设$\mathscr{U}$是可数地齐次模型，如果与$\mathrm{Th}\mathscr{U}$和谐的每个型$\Gamma(x_1, \cdots, x_n)$都在$\mathscr{U}$中被满足，则$\mathscr{U}$是可数地饱和模型。

10.3.2 设$\mathscr{U}$是$\mathscr{L}$的模型，对任意a_1，$\cdots$，a_n，a_{n+1}，b_1，$\cdots$，$b_n\in A$，如果$(\mathscr{U}, a_1, \cdots, a_n)\equiv(\mathscr{U}, b_1, \cdots, b_n)$，则存在$b_{n+1}\in A$，使$(\mathscr{U}, a_1, \cdots, a_{n+1})\equiv(\mathscr{U}, b_1, \cdots, b_{n+1})$。证明$\mathscr{U}$必有一个可数地齐次模型作为初等子模型。

10.3.3 设$\mathscr{U}$是可数地齐次模型，$\mathscr{U}\equiv\mathscr{B}$，$\mathscr{B}$也是可数模型，每个型$\Gamma(x_1, \cdots, x_n)$被$\mathscr{B}$满足就能被$\mathscr{U}$满足，证明$\mathscr{B}$初等嵌入$\mathscr{U}$.

第十一章　模型的自同构

$\mathscr{L}$ 的模型 $\mathscr{U}$ 到其自身的一个同构映射称为**自同构**。恒等映射是显然的自同构，除恒等映射之外，一个模型可能没有其他的自同构，也可能有其他的自同构，甚至有无限多个自同构。

例如$\mathscr{L}=\{P\}$，P是一元关系符号，$\mathscr{U}=\langle A,U\rangle$，$A=\{a,b,c\}$，$U=\{c\}\subset A$，则 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{L}$ 的一个模型，容易看出 $\mathscr{U}$ 的自同构必须保持关系U，因此必须有 $f(c)=c$，这样 $\mathscr{U}$ 的自同构只有两个，一个是恒等映射，另一个是 $f(a)=b$，$f(b)=a$，$f(c)=c$，当$A=\{a, b\}$两个元素，$U=\{b\}$时，$\mathscr{U}$ 只有一个自同构即恒等映射。如果 A 是一个无限集，则 $\mathscr{U}$ 有无限多个自同构。

模型的自同构反映出模型的许多重要性质，研究并构造模型的自同构是模型论的重要方法之一。为此我们先介绍几个有关的概念作准备。

§11.1　Skolem 函数和不可辨元

设 $\mathscr{L}$ 是一个一阶语言，对 $\mathscr{L}$ 的每个公式 $\varphi(x, x_1, \cdots, x_n)$ 定义一个新的 n 元函数符号 F_φ，称 F_φ 是 φ 的 **Skolem 函数符号**，令 $\mathscr{L}^*=\mathscr{L}\cup\{F_\varphi\colon \varphi(x,x_1,\cdots,x_n)\in\mathscr{L}\}$，$\mathscr{L}^*$ 是 $\mathscr{L}$ 中添加所有的 Skolem 函数符号得到的膨胀语言，称 $\mathscr{L}^*$ 是 $\mathscr{L}$ 的 **Skolem 膨胀**。对 $\mathscr{L}$ 中每个公式 $\varphi(x, x_1, \cdots, x_n)$，令

$$\psi_\varphi=\forall x_1\cdots x_n(\exists x\varphi(x,x_1,\cdots,x_n)\to\varphi(F_\varphi(x_1,\cdots,x_n),x_1,\cdots,x_n))$$

令　$\Sigma_{\mathscr{L}}=\{\psi_\varphi\colon \varphi(x,x_1,\cdots,x_n)\in\mathscr{L}\}$

$\Sigma_{\mathscr{L}}$是 $\mathscr{L}^*$ 中的句子集，称 $\Sigma_{\mathscr{L}}$是 $\mathscr{L}$ 的 **Skolem 公理集**。设 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{L}$ 的一个模型，T 是 $\mathscr{L}$ 的一个句子集，$\mathscr{U}^*$ 是 $\mathscr{U}$ 的 $\mathscr{L}^*$ 膨胀

模型，如果 $\mathscr{U}^* \models \Sigma_{\mathscr{L}}$ 就称 $\mathscr{U}^*$ 为 $\mathscr{U}$ 的 **Skolem 膨胀模型**，令 $T^* = T \cup \Sigma_{\mathscr{L}}$，称 T^* 是 T 的 **Skolem 扩充**。

命题 11.1.1 设 T 是 $\mathscr{L}$ 的一个和谐理论，$\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{L}$ 中 T 的模型，则存在 $\mathscr{U}$ 的 Skolem 膨胀模型 $\mathscr{U}^*$ 使 $\mathscr{U}^* \models T^*$.

证明 设 $\mathscr{U}$ 是 T 的一个模型，A 是 $\mathscr{U}$ 的论域，先使 A 良序化，设 g 是 A 的幂集 $P(A)$ 到 A 的一个映射，使对 A 的任意子集 $B \subset A$，$g(B) = b \in B$ 是 B 的最小元。对 $\mathscr{L}$ 的任意公式 $\varphi(x, x_1, \cdots, x_n)$，任意 n 个元素 $a_1, \cdots, a_n \in A$，如果 $\mathscr{U} \models \exists x \varphi [a_1, \cdots, a_n]$，令

$B_\varphi(a_1, \cdots, a_n) = \{a \in A: \mathscr{U} \models \varphi [a, a_1, \cdots, a_n]\}$，

定义 $F_\varphi^{\mathscr{U}^*}(a_1, \cdots, a_n) = g(B_\varphi(a_1, \cdots, a_n))$。

易见 $g(B_\varphi)$ 是使 $\mathscr{U} \models \varphi [a, a_1, \cdots, a_n]$ 的最小一个元素 a，如果 $\mathscr{U} \not\models \exists x \varphi [a_1, \cdots, a_n]$，这时 $B_\varphi = \varnothing$，定义

$F_\varphi^{\mathscr{U}^*}(a_1, \cdots, a_n) = g(A)$。

这样定义的 $F_\varphi^{\mathscr{U}^*}$ 是 A 上的 n 元函数，以 $F_\varphi^{\mathscr{U}^*}$ 作 F_φ 的解释就得到 $\mathscr{U}$ 的 Skolem 膨胀模型 $\mathscr{U}^*$. 不难看出对 $\mathscr{L}$ 中任意公式 $\varphi(x, x_1, \cdots, x_n)$ 都有

$$\mathscr{U}^* \models \forall x_1 \cdots x_n (\exists x \varphi(x, x_1 \cdots x_n) \to \varphi(F_\varphi(x_1 \cdots x_n), x_1, \cdots, x_n))$$

这样 $\mathscr{U}^* \models \Sigma_{\mathscr{L}}$，由 $\mathscr{U} \models T$，得 $\mathscr{U}^* \models T^*$. ▌

命题 11.1.2 设 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{L}$ 的模型，$\mathscr{U}^*$，$\mathscr{B}^*$ 分别是 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 的 Skolem 膨胀模型，如果 $\mathscr{U}^* \subset \mathscr{B}^*$，则 $\mathscr{U} \prec \mathscr{B}$.

证明 由于 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{U}^*$，$\mathscr{B}^*$ 的 $\mathscr{L}$ 归约模型，$\mathscr{U}^* \subseteq \mathscr{B}^*$，显然有 $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{B}$。对 $\mathscr{L}$ 中任一公式 $\varphi(x, x_1, \cdots, x_n)$，任意 n 个元素 $a_1, \cdots, a_n \in A$，如果 $\mathscr{B} \models \exists x \varphi [a_1, \cdots, a_n]$，则 $\mathscr{B}^* \models \exists x \varphi [a_1, \cdots, a_n]$。由

$$\mathscr{B}^* \models \forall x_1 \cdots x_n (\exists x \varphi(x x_1 \cdots x_n) \to \varphi(F_\varphi(x_1 \cdots x_n), x_1, \cdots, x_n))$$

知必有 $\mathscr{B}^* \models \varphi [F_\varphi^{\mathscr{B}^*}(a_1, \cdots, a_n), a_1, \cdots, a_n]$。而由 $\mathscr{U}^* \subseteq \mathscr{B}^*$ 及

$a_1, \cdots, a_n \in A$，知 $F_\varphi^{\mathscr{B}^*}(a_1,\cdots,a_n)=F_\varphi^{\mathscr{U}^*}(a_1,\cdots,a_n)\in A$。再由引理 4.3.7 知 $\mathscr{U}\prec\mathscr{B}$. ▌

设 $\mathscr{L}^*$ 是 $\mathscr{L}$ 的 Skolem 膨胀语言，$\mathscr{U}^*$ 是 $\mathscr{U}$ 的 Skolem 膨胀模型，$X\subset A$，设 Y 是 A 的一个子集，$X\subset Y\subset A$，如果 Y 是包含 X 且对 $\mathscr{U}^*$ 的所有的函数常量都封闭的最小子集，则称 Y 是 X 在 $\mathscr{U}^*$ 中的 **Skolem 壳**，记 X 的 Skolem 壳 Y 为 $H(X)$. 由于 $H(X)$ 也对 $\mathscr{U}$ 的所有函数常量都封闭，因此以 $H(X)$ 为论域可以构成 $\mathscr{U}$ 的子模型，这个子模型也叫 X 的 **Skolem 壳**，记作 $\mathscr{H}(X)$.

命题 11.1.3 设 $\mathscr{U}^*$ 是 $\mathscr{U}$ 的 Skolem 膨胀，$X\subset A$，$\mathscr{H}(X)$ 是 X 的 Skolem 壳，则 $|\mathscr{H}(X)|\leqslant|X|\cup\|\mathscr{L}\|$，且 $\mathscr{H}(x)\prec\mathscr{U}$.

证明 由于 $\mathscr{H}(X)$ 对 $\mathscr{U}^*$ 的所有函数常量都封闭，以 $\mathscr{H}(X)$ 为论域作成 $\mathscr{U}^*$ 的子模型恰好是 $\mathscr{H}(X)$ 的 Skolem 膨胀 $\mathscr{H}(X)^*$，由 $\mathscr{H}(X)^*\subset\mathscr{U}^*$ 及命题 11.1.2 有 $\mathscr{H}(X)\prec\mathscr{U}$.

由于 $\mathscr{L}^*$ 是对 $\mathscr{L}$ 中每个公式 $\varphi(xx_1,\cdots,x_n)$ 添加一个新函数符号 F_φ 得到的膨胀语言，因此

$\|\mathscr{L}^*\|\leqslant\|\mathscr{L}\|\cup\|\mathscr{L}\|=\|\mathscr{L}\|$，自然有 $\|\mathscr{L}^*\|=\|\mathscr{L}\|$。把 X 作为新常量添加到 $\mathscr{L}^*$ 中得到 $\mathscr{L}_X^*$，则 $\|\mathscr{L}_X^*\|=|X|\cup\|\mathscr{L}^*\|=|X|\cup\|\mathscr{L}\|$。易见包含 X 的对 $\mathscr{U}^*$ 中函数常量封闭的最小集 $\mathscr{H}(X)$ 的基数不大于 $\|\mathscr{L}_X^*\|$，因此 $|\mathscr{H}(X)|\leqslant|X|\cup\|\mathscr{L}\|$. ▌

设 $\mathscr{L}$ 是一个一阶形式语言。如果对 $\mathscr{L}$ 中任何一个公式 $\varphi(xx_1,\cdots,x_n)$，$\mathscr{L}$ 中存在一个项 $t_\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 使 $\psi_\varphi=\forall x_1\cdots x_n(\exists x\varphi(xx_1,\cdots,x_n)\to\varphi(t_\varphi(x_1,\cdots,x_n),x_1,\cdots,x_n))$ 是 $\mathscr{L}$ 中一个句子，则称 $\mathscr{L}$ 具有内在的 Skolem 函数。$\mathscr{L}$ 的一个理论 T 称为具有**内在的 Skolem 函数**，如果对每个公式 $\varphi(x,x_1,\cdots,x_n)$，$\mathscr{L}$ 中有项 t_φ，使

$T\vdash\forall x_1\cdots x_n(\exists x\varphi(xx_1,\cdots,x_n)\to\varphi(t_\varphi(x_1,\cdots,x_n),x_1,\cdots,x_n))$.

命题 11.1.4 设 T 是一个具有内在 Skolem 函数的理论，则 T 是模型完全理论，即对 T 的任意模型 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$，如果 $\mathscr{U}\subseteq\mathscr{B}$，则 $\mathscr{U}\prec\mathscr{B}$.

证明 设 T 具有内在的 Skolem 函数，$\mathscr{U}$，$\mathscr{B}\models T$，则 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 可以看成自身的 Skolem 膨胀模型，即 $\mathscr{U}^*=\mathscr{U}$，$\mathscr{B}^*=\mathscr{B}$，这样 $\mathscr{U}\subseteq\mathscr{B}$ 即 $\mathscr{U}^*\subseteq\mathscr{B}^*$，由命题 11.1.2 有 $\mathscr{U}\prec\mathscr{B}$. ▌

命题 11.1.5 设 $\mathscr{L}$ 是一个一阶语言，T 是 $\mathscr{L}$ 的一个理论，则 $\mathscr{L}$ 可以膨胀到 $\overline{\mathscr{L}}$，使 $\overline{\mathscr{L}}$ 具有内在的 Skolem 函数，T 在 $\overline{\mathscr{L}}$ 中可以扩充到 $\overline{T}$，使 $\overline{T}$ 是具有内在的 Skolem 函数的理论，设 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{L}$ 中 T 的模型，则 $\mathscr{U}$ 可以膨胀到 $\mathscr{U}'\models\overline{T}$.

证明 令 $\mathscr{L}_0=\mathscr{L},\mathscr{L}_{n+1}=\mathscr{L}_n^*,T_0=T,T_{n+1}=T_n^*=T_n\cup\Sigma_{\mathscr{L}_n}$，令 $\overline{\mathscr{L}}=\bigcup\limits_{n<\omega}\mathscr{L}_n$，$\overline{T}=\bigcup\limits_{n<\omega}T_n=T\cup\bigcup\limits_{n<\omega}\Sigma_{\mathscr{L}_n}$. 由于 $\overline{\mathscr{L}}$ 的每个公式 $\varphi(xx_1,\cdots,x_n)$ 中至多只有有限多个符号，因此存在 $m<\omega$，使 $\varphi\in\mathscr{L}_m$. 这样有 $t_\varphi\in\mathscr{L}_{m+1}$，使

$\psi_\varphi=\forall x_1\cdots x_n(\exists x\varphi(xx_1\cdots x_n)\to\varphi(t_\varphi(x_1,\cdots,x_n),x_1,\cdots,x_n))$ 是 $\mathscr{L}_{n+1}$ 中句子，由 $\mathscr{L}_{m+1}\subset\overline{\mathscr{L}}$，当然有 t_φ，ψ_φ 是 $\overline{\mathscr{L}}$ 中的项和句子，这样 $\overline{\mathscr{L}}$ 是具有内在 Skolem 函数的语言。由于 $\overline{T}=T\cup\bigcup\limits_{n<\omega}\Sigma_{\mathscr{L}_n}$，对 $\overline{\mathscr{L}}$ 的每个公式 $\varphi(xx_1\cdots x_n)$，φ 是某个 $\mathscr{L}_m$ 的句子，$\psi_\varphi\in\Sigma_{\mathscr{L}_m}$，从而 $\overline{T}\vdash\psi_\varphi$，因此 $\overline{T}$ 是具有内在 Skolem 函数的理论。

设 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{L}$ 的模型，$\mathscr{U}\models T$，由命题 11.1.1 知 $\mathscr{U}^*\models T^*$，这样对每个 $n<\omega$，$\mathscr{U}$ 可以膨胀为 $\mathscr{L}_n$ 中的 T_n 的模型。这样对 $\overline{\mathscr{L}}$ 中每个新增加的函数符号都可以在 $\mathscr{U}$ 的膨胀模型中有解释，因此 $\mathscr{U}$ 可以膨胀为 $\overline{\mathscr{L}}$ 的模型 $\mathscr{U}'$，使对每个 $n<\omega$，$\mathscr{U}'$ 到 $\mathscr{L}_{n+1}$ 的限制是 $\mathscr{U}_n^*$。由命题 11.1.1 $\mathscr{U}_n^*\models T_n^*$，因此 $\mathscr{U}'\models\overline{T}$. ▌

现在我们来看模型的不可辨元。设 $\mathscr{U}$ 是一阶语言 $\mathscr{L}$ 的一个模型，$X\subset A$ 是论域 A 的一个子集，设 X 有一个严格单序关系 $<$，使 X 的元素组成一个全序集，“$<$” 可以不是 $\mathscr{L}$ 的关系符号，也

不是模型 $\mathscr{U}$ 的二元关系，如果对 X 的任意两个同长有限序列 a_1，…，a_n 和 b_1，…，b_n，只要 $a_1<\cdots<a_n$，$b_1<\cdots<b_n$，就有 $(\mathscr{U},a_1,\cdots,a_n)\equiv(\mathscr{U},b_1,\cdots,b_n)$就称 X 是 $\mathscr{U}$ 的**不可辨元集**。

定义中的$(\mathscr{U},a_1,\cdots,a_n)$，$(\mathscr{U},b_1,\cdots,b_n)$的意义是对 $\mathscr{L}$ 中增加新常量 c_1，…，c_n 得 $\mathscr{L}'$，$\mathscr{L}'=\mathscr{L}\cup\{c_1,\cdots,c_n\}$ 在 $\mathscr{U}$ 中分别用 a_1，…，a_n 解释 c_1，…，c_n 得膨胀模型（$\mathscr{U}$，a_1，…，a_n），分别用 b_1，…，b_n 解释 c_1，…，c_n 得膨胀模型（$\mathscr{U}$，b_1，…，b_n）。这样 $(\mathscr{U},a_1,\cdots,a_n)\equiv(\mathscr{U},b_1,\cdots,b_n)$ 意为对 $\mathscr{L}$ 的任意公式 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$

(1) $\mathscr{U}\models\varphi[a_1,\cdots,a_n]$ 当且仅当 $\mathscr{U}\models\varphi[b_1,\cdots,b_n]$。

事实上，上式左边与 $(\mathscr{U}a_1,\cdots,a_n)\models\varphi(c_1,\cdots,c_n)$ 等价，右边与$(\mathscr{U}b_1,\cdots,b_n)\models\varphi(c_1,\cdots,c_n)$等价，由于两个膨胀模型在 $\mathscr{L}'$ 上初等等价，(1) 式成立。

这样由(1)可知我们定义的不可辨元集 X 的意义也就是任何一个一阶公式 φ 不能区别 X 的二个不同的序列，这就是称 X 为不可辨元集的原因。

通常当$<$关系是显见的时候，我们不特别指出 X 是关于“$<$”的不可辨元集。如果对 X 的任何一种序关系，X 都是 $\mathscr{U}$ 的不可辨元集，我们就称 X 是 $\mathscr{U}$ 的**全不可辨元集**。

本章最开始我们给出一个例子 $\mathscr{L}=\{P\}$，$\mathscr{U}=\langle A,U\rangle$，$A=\{a、b、c\}$，$U=\{c\}$，令 $X=\{a,b\}$，$X\subset A$，显见 X 是 $\mathscr{U}$ 的不可辨元集。

设 $\mathscr{L}=\{\leqslant\}$，$\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{L}$ 的无端点稠密线性序模型，则 $\mathscr{U}$ 的论域 A 关于 $\mathscr{U}$ 自身的小于关系$<$是不可辨元集。

利用模型的自同构可以判别不可辨元集。

命题 11.1.6 设 $\langle X,<\rangle$ 是模型 $\mathscr{U}$ 的论域 A 的一个有序子集，如果对 X 的任意两个长度一样的有限序列 $a_1<\cdots<a_n$，$b_1<\cdots<b_n$，都有自同构 f：$\mathscr{U}\cong\mathscr{U}$ 使 $f(a_1)=b_1$，…，$f(a_n)=b_n$，则

$\langle X, <\rangle$ 是 $\mathscr{U}$ 的不可辨元集。

证明 对 X 的任意两个同长序列 $a_1<\cdots<a_n$，$b_1<\cdots<b_n$ 令 $\mathscr{L}'=\mathscr{L}\cup\{c_1, \cdots, c_n\}$，由 f：$\mathscr{U}\cong\mathscr{U}$，$f(a_1)=b_1,\cdots,f(a_n)=b_n$，我们有 f：$(\mathscr{U},a_1,\cdots,a_n)\cong(\mathscr{U},b_1,\cdots,b_n)$，这样显然有 $(\mathscr{U}a_1,\cdots,a_n)\equiv(\mathscr{U}b_1,\cdots,b_n)$. 因此 X 是 $\mathscr{U}$ 的不可辨元集。 ▌

由这个命题容易判断我们所给的两个例子中的不可辨元集。

练习

11.1.1 设 T 是具有内在 Skolem 函数的一个理论，$\mathscr{U}$ 是 T 的模型，证明 $\mathrm{Th}(\mathscr{U}_A)$ 也是一个具有内在 Skolem 函数的理论。

11.1.2 令 $\mathscr{U}=\langle N, \leqslant\rangle$，其中 N 是自然数集. 证明 $\mathscr{U}$ 有两个不同的 Skolem 膨胀 $\mathscr{U}_1$，$\mathscr{U}_2$，$\mathscr{U}_1\neq\mathscr{U}_2$，由此可证明完全理论 $\mathrm{Th}\mathscr{U}$ 的 Skolem 扩充不一定是完全的。

11.1.3 设 $\mathscr{L}=\{E\}$，E 是一个二元关系，如果 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{L}$ 的一个模型 $\mathscr{U}=\langle A, E\rangle$，$\mathscr{U}$ 中 E 解释为一个等价关系。如果 A 的等价类都等势，证明 A 的每个等价类都是 $\mathscr{U}$ 的全不可辨元集。令 X 是 A 的等价类的代表元的集合，则 X 也是 $\mathscr{U}$ 的不可辨元集。这样当 A 是不可数无限集时，$\mathscr{U}$ 一定有不可数无限大的不可辨元集。

11.1.4 证明对每个公式 $\psi\in\mathscr{L}$，在 $\mathscr{L}$ 的 Skolem 膨胀语言 $\mathscr{L}^*$ 中存在一个全称公式 φ 使 $\Sigma_{\mathscr{L}}\vdash\varphi\rightarrow\psi$，且 $\Sigma_{\mathscr{L}}\vdash\psi\rightarrow\varphi$，称 φ 是 ψ 的 Skolem 范式。

11.1.5 设 $\mathscr{U}$ 是一个布尔代数，X 是 $\mathscr{U}$ 的全体原子的集合. 证明 X 是 $\mathscr{U}$ 的不可辨元集。

11.1.6 设 $\mathscr{U}$ 是数域 F 上一个多项式环，X 是 $\mathscr{U}$ 的不定元的集合，即 X 是全体变元组成的集合。证明 X 是 $\mathscr{U}$ 的不可辨元集。

11.1.7 设 X 是 $\mathscr{U}$ 的不可辨元集，$\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{U}$ 的初等子模型，

$X \subset B \subset A$，证明 X 是 $\mathscr{B}$ 的不可辨元集。

§11.2 模型的自同构

设 f，g 都是模型 $\mathscr{U}$ 的自同构，不难看出复合映射 $f \circ g$ 也是 $\mathscr{U}$ 的自同构，f^{-1}也是 $\mathscr{U}$ 的自同构，这样 $\mathscr{U}$ 的全体自同构对复合运算组成群，叫做 $\mathscr{U}$ 的**自同构群**，其中恒等映射是自同构群的单位元. 本节的目标是证明任何一个无限模型都可以有一个初等扩充模型，使之有任意大的自同构群。

引理 11.2.1 令 $\mathscr{L}' = \mathscr{L} \cup \{c_n : n < \omega\}$，其中 c_n 是新常量，令 T 是 $\mathscr{L}$ 的有无限模型的一个理论，则 $\mathscr{L}'$ 中如下的理论 T' 是和谐的：

$T' = T \cup \{\varphi(c_{i_1}, \cdots, c_{i_n}) \leftrightarrow \varphi(c_{j_1}, \cdots, c_{j_n}) : \varphi(v_1, \cdots, v_n)$ 是 $\mathscr{L}$ 的一个公式，$n < \omega$，$i_1 < \cdots < i_n$，$j_1 < \cdots < j_n\} \cup \{c_1 \neq c_2\}$

证明 设 $\mathscr{U}$ 是 T 的一个无限模型，在论域 A 中取一个可数无限子集 I，良序 I 并列出其全体元素

$a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots$

我们证明：对 T' 的任意有限子集 Δ，存在无限子集 $J_\triangle \subset I$，使

(1) 对 $J_\triangle$ 的每个无限子集 $a_{j_0} < a_{j_1} < \cdots < a_{j_n} < \cdots$

$\mathscr{U}$ 的膨胀模型 $(\mathscr{U}, a_{j_n})_{n<\omega}$ 满足 Δ.

对 Δ 的句子个数归纳证明。设对某个有限子集 $\Delta \subset T'$. (1) 已经成立. 我们证明 Δ 中再增加一个句子(1)仍然成立。令 $\varphi(v_1 \cdots v_m)$ 是 $\mathscr{L}$ 的一个公式，令

$A_0 = \{a_{j_1} < \cdots < a_{j_m} : a_{j_i} \in J_\triangle,\ \mathscr{U} \models \varphi\ [a_{j_1}, \cdots, a_{j_m}]\}$

$A_1 = \{a_{j_1} < \cdots < a_{j_m} : a_{j_i} \in J_\triangle,\ \mathscr{U} \models \neg\varphi\ [a_{j_1}, \cdots, a_{j_m}]\}$

由于 $J_\triangle$ 中任意一个 m 元序列 $a_{j_1} < \cdots < a_{j_m}$ 或

$\mathscr{U} \models \varphi\ [a_{j_1}, \cdots, a_{j_m}]$ 或 $\mathscr{U} \models \neg\varphi\ [a_{j_1}, \cdots, a_{j_m}]$ 必有一个成立，

因此 $[J_\triangle]^m \subset A_0 \cup A_1$. 由 Ramsey 定理 8.1.6 存在一个无限子集 $K \subset J_\triangle$ 使 $[K]^m \subset A_0$ 或 $[K]^m \subset A_1$。列出 K 的全部元素 $a_{k_0} < a_{k_1} < \cdots < a_{k_n} < \cdots$ 易见无论哪一种情况都有

$$(\mathscr{U}, a_{k_n})_{n<\omega} \models \varphi(c_{i_1} \cdots c_{i_m}) \leftrightarrow \varphi(c_{j_1} \cdots c_{j_m})$$

其中 $i_1 < \cdots < i_m$, $j_1 < \cdots < j_m$, 由于 $K \subset J_\triangle$, 自然仍有

$(\mathscr{U}, a_{kn})_{n<\omega} \models \Delta$.

这样 (1) 对 $\Delta \cup \{\varphi(c_{i_1}, \cdots, c_{i_m}) \leftrightarrow \varphi(c_{j_1}, \cdots, c_{j_m})\}$ 成立，从而完成归纳。$c_1 \neq c_2$，显见成立，因此 (1) 成立.

由 (1) 可知 T' 是有限可满足的，由紧致性定理 T' 是可满足的，因此是和谐的。 ▌

注意引理 11.2.1 中虽然 T' 中只出现一个不等式 $c_1 \neq c_2$，实际上，令 $\varphi(v_1 v_2) = v_1 \neq v_2$，对任意 $m < n < \omega$，由于 $\varphi(c_1 c_2) \leftrightarrow \varphi(c_m c_n)$ 也是 T' 的句子、即

$c_1 \neq c_2 \leftrightarrow c_m \neq c_n \in T'$，因此 $T' \vdash c_m \neq c_n$. 引理的证明中，T' 的任意有限子集 Δ 的模型 $(\mathscr{U}, a_{j_n})_{n<\omega}$ 中 $J_\triangle = \{a_{j_0}, a_{j_1}, \cdots\}$ 是一个无限集，每个 a_{j_n} 作新常量 c_n 的解释，自然满足所有的句子 $c_m \neq c_n$.

定理 11.2.2 设 T 是 $\mathscr{L}$ 的一个理论，T 有无限模型. 令 $\langle X、<\rangle$ 是一个全序集，则 T 有一个模型 $\mathscr{U}$，使 $X \subset A$，X 是 $\mathscr{U}$ 的不可辨元集。

证明 令 $\mathscr{L}' = \mathscr{L} \cup \{c_a : a \in X\}$,

$T' = T \cup \{\varphi(c_{a_1}, \cdots, c_{a_n}) \leftrightarrow \varphi(c_{b_1}, \cdots, c_{b_n}) : \varphi(v_1, \cdots, v_n)$ 是 $\mathscr{L}$ 的一个公式，$n < \omega$，$a_1 < \cdots < a_n$，$b_1 < \cdots < b_n$，a_i，$b_j \in X$，i，$j = 1, \cdots, n\} \cup \{c_{a_1} \neq c_{a_2} : a_1 \neq a_2 \in X\}$。

由引理 11.2.1 知 T' 是有限可满足的，因此 T' 可满足. 令 $\mathscr{U}'$ 是 T' 的一个模型，$\mathscr{U} = \mathscr{U}' | \mathscr{L}$，即 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{U}'$ 的 $\mathscr{L}$ 归约模型，则 $\mathscr{U} \models T$. $\mathscr{L}'$ 中的常量 c_a，$a \in x$，在 $\mathscr{U}$ 中的解释不妨仍用 a 来表示，由于 $\mathscr{U}' \models c_a \neq c_b$ 当且仅当 $a \neq b$，a、$b \in X$，$\mathscr{U}$ 中所有 c_a，$a \in X$，

的解释各不相同，因此可以看作 $X\subset A$，对 $\mathscr{L}$ 的任意公式 $\varphi(v_1, \cdots, v_n)$，$X$ 中任意两个 n 元序列 $a_1<\cdots<a_n$，$b_1<\cdots<b_n$，由

$$\mathscr{U}'\models\varphi(c_{a_1}, \cdots, c_{a_n})\leftrightarrow\varphi(c_{b_1}, \cdots, c_{b_n})$$

及 $\mathscr{U}'\models\varphi[a_1, \cdots, a_n]$ 当且仅当 $\mathscr{U}'\models\varphi(c_{a_1}, \cdots, c_{a_n})$，有

$$\mathscr{U}\models\varphi[a_1, \cdots, a_n] \text{ 当且仅当 } \mathscr{U}\models\varphi[b_1, \cdots, b_n]$$

这样有 $(\mathscr{U}a_1, \cdots, a_n)\equiv(\mathscr{U}b_1, \cdots, b_n)$，因此 X 是 $\mathscr{U}$ 的不可辨元集。 ▌

定理 11.2.2 说明任何一个无限模型都可以有初等扩充，使它包含任意大的不可辨元集。

下面我们要把不可辨元集与 Skolem 函数结合起来构造模型的自同构。由命题 11.1.5 我们总可以假设 $\mathscr{L}$ 有内在的 Skolem 函数，T 有内在 Skolem 函数的理论。这样对任意模型 $\mathscr{U}$，$\mathscr{U}\models T$ 时只要让项 t_φ 的解释作 Skolem 函数 F_φ 的解释，$\mathscr{U}$ 本身就已经具有 Skolem 函数了. 于是 $\mathscr{U}$ 的 Skolem 膨胀便可以看成是它自己，即 $\mathscr{U}^*=\mathscr{U}$，设 $X\subset A$，X 生成的 Skolem 壳 $H(X)$ 可以构成 $\mathscr{U}$ 的子模型 $\mathscr{H}(X)$。由命题 11.1.4 $\mathscr{H}(X)\prec\mathscr{U}$。如果 X 是 $\mathscr{U}$ 的不可辨元集而 $\mathscr{H}(X)=\mathscr{U}$，则称模型 $\mathscr{U}$ 是由不可辨元集 X 生成的，由不可辨元集生成的模型有许多有趣的性质。

命题 11.2.3 设 $\langle X, <\rangle$ 是 $\mathscr{U}$ 的不可辨元集，如果 Y 是 X 的子集，$Y\subset X$，则 $\langle Y, <\rangle$ 也是 $\mathscr{H}(Y)$ 的不可辨元集，而且 $\mathscr{H}(Y)\prec\mathscr{H}(X)$.

证明 由 $Y\subset X$，易见 Y 生成的 Skolem 壳必被包含于 X 生成的 Skolem 壳中，即 $H(Y)\subset H(X)$，这样由 $H(Y)$ 构成的 $\mathscr{U}$ 的子模型必然是 $H(X)$ 构成的 $\mathscr{U}$ 的子模型的子模型，即 $\mathscr{H}(Y)\subset\mathscr{H}(X)$. 再由 $\mathscr{H}(Y)^*\subset\mathscr{H}(X)^*$，知 $\mathscr{H}(Y)\prec\mathscr{H}(X)$.

由 X 是 $\mathscr{U}$ 的不可辨元集，易见 Y 也是 $\mathscr{U}$ 的不可辨元集，这样对 Y 中任意两个序列 $a_1<\cdots<a_n$，$b_1<\cdots<b_n$，由 $\mathscr{H}(Y)\prec\mathscr{U}$，

$$(\mathscr{H}(Y), a_1, \cdots, a_n)\equiv(\mathscr{U}, a_1, \cdots, a_n),$$

$(\mathscr{H}(Y), b_1, \cdots, b_n) \equiv (\mathscr{U}, b_1, \cdots, b_n)$。

而由 Y 是 $\mathscr{U}$ 的不可辨元集有

$(\mathscr{U}, a_1, \cdots, a_n) \equiv (\mathscr{U}, b_1, \cdots, b_n)$

因此有 $(\mathscr{H}(Y), a_1, \cdots, a_n) \equiv (\mathscr{H}(Y), b_1, \cdots, b_n)$

这样 Y 是 $\mathscr{H}(Y)$ 的不可辨元集。 ▌

命题 11.2.4 设 X 是 $\mathscr{U}$ 的无限不可辨元集，Y 是任意一个无限集，则存在模型 $\mathscr{B}$，使 Y 是 $\mathscr{B}$ 的不可辨元集，而且对 X 中的任意序列 $a_1 < \cdots < a_n$ 和 Y 中任意序列 $b_1 < \cdots < b_n$，对 $\mathscr{L}$ 中的任意公式 $\varphi(v_1, \cdots, v_n)$，

$\mathscr{U} \models \varphi[a_1, \cdots, a_n]$ 当且仅当 $\mathscr{B} \models \varphi[b_1, \cdots, b_n]$.

证明 令 $\mathscr{L}' = \mathscr{L} \cup \{c_b: b \in Y\}$

$T' = \{\varphi(c_{b_1}, \cdots, c_{b_n}): b_1 < \cdots < b_n \in Y, a_1 < \cdots < a_n \in X,$

$\mathscr{U} \models \varphi[a_1, \cdots, a_n]\} \cup \{c_{b_1} \neq c_{b_2}: b_1 \neq b_2 \in Y\}$

容易看出 T' 的任意有限子集都可被 $\mathscr{U}$ 的一个膨胀模型满足，因此 T' 是有限可满足的. 由紧致性定理 T' 有模型 $\mathscr{B}'$、$\mathscr{B}'$ 的 $\mathscr{L}$ 归约记作 $\mathscr{B}$，则对 $\mathscr{L}$ 的任意公式 $\varphi(v_1 \cdots v_n)$、X、Y 中的任意有限序列 $a_1 < \cdots < a_n$，$b_1 < \cdots < b_n$

$\mathscr{U} \models \varphi[a_1, \cdots, a_n]$ 当且仅当 $\varphi(c_{b_1}, \cdots, c_{b_n}) \in T'$

当且仅当 $\mathscr{B} \models \varphi[b_1, \cdots, b_n]$

由此也不难看出 Y 是 $\mathscr{B}$ 的不可辨元集。 ▌

注意命题 11.2.4 中只有当 X 是 $\mathscr{U}$ 的不可辨元集时 T' 才能是和谐句子集，不然，对 X 中不同的序列 $a_{i_1} < \cdots < a_{i_n}$，$a_{j_1} < \cdots < a_{j_n}$，$\varphi(c_{b_1} \cdots c_{b_n})$ 在 T' 中可能正负都出现而使 T' 不和谐. 命题中的 T' 也可以再加上 $\mathrm{Th}\mathscr{U}_A$，T' 仍是可满足的，这样得到的模型 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{U}$ 的初等扩充，$\mathscr{B}$ 中不可辨元集比 $\mathscr{U}$ 中不可辨元集伸长了，因此 命题 11.2.4 也叫做不可辨元集的**伸长定理**。

设 $\langle X、< \rangle$ 和 $\langle Y、< \rangle$ 是两个全序集，如果 X 到 Y 内一个映射 f 是保序映射，即对任意 $a_1, a_2 \in x$，$a_1 < a_2$ 当且仅当

$f(a_1)<f(a_2)$,则称 f 是 $\langle x、<\rangle$ 到 $\langle Y,<\rangle$ 内的**序同构嵌入**。

命题 11.2.5 设 $\mathscr{L}$ 有内在的 Skolem 函数，T 是 $\mathscr{L}$ 的有内在 Skolem 函数的理论，$\mathscr{L}$ 的模型 $\mathscr{U}\models T$，X 是 $\mathscr{U}$ 的不可辨元集，设 Y 是模型 $\mathscr{B}$ 的不可辨元集，X、Y 中的元素的有限递增序列在 $\mathscr{U}$ 和 $\mathscr{B}$ 中满足的 $\mathscr{L}$ 的公式完全相同。如果 f 是 $\langle X、<\rangle$ 到 $\langle Y、<\rangle$ 的序同构，则 f 可以唯一地扩充为 $\mathscr{H}(X)$ 到 $\mathscr{H}(Y)$ 内的初等嵌入 $\bar{f}$，且 $\bar{f}$ 的值域等于 $H(f[X])$，其中 $f[X]$ 是 Y 中映射 f 下 X 的象集。

证明 由 $\mathscr{H}(X)$ 的定义及 $\mathscr{L}$ 具有内在 Skolem 函数知，任意一个元素 $a\in\mathscr{H}(X)$，必有一项 $t(v_1,\cdots,v_n)\in\mathscr{L}$，$a_1,\cdots,a_n\in X$，使 $a=t^{\mathscr{U}}(a_1,\cdots,a_n)$。可以适当变动项 t 中变元，使恰好有 $a_1<\cdots<a_n$，称这样的 t 为 a 在 $H(x)$ 中的**标准表示**. 令

$$\bar{f}(a)=t^{\mathscr{B}}(f(a_1),\cdots,f(a_n))$$

先证明 $\bar{f}$ 是 $\mathscr{H}(X)$ 到 $\mathscr{H}(Y)$ 的映射：设 a 有两个标准表示 $t_1^{\mathscr{U}}(a_1,\cdots,a_n)$ 和 $t_2^{\mathscr{U}}(a_1',\cdots,a_m')$，在 $\mathscr{U}$ 中

$$t_1^{\mathscr{U}}(a_1,\cdots,a_n)=t_2^{\mathscr{U}}(a'_1,\cdots,a'_m)$$

令 $\{a_1,\cdots,a_n,a_1',\cdots,a_m'\}$ 按 X 中序关系由小到大排成一列为 $d_1<\cdots<d_t$ 以 $\varphi[d_1,\cdots,d_t]$ 表示 $t_1(a_1,\cdots,a_n)\equiv t_2(a_1',\cdots,a_m')$。这样得到 $\mathscr{U}\models\varphi[d_1,\cdots,d_t]$。由题设也有 $\mathscr{B}\models\varphi[f(d_1),\cdots,f(d_t)]$，而这就是 $t_1^{\mathscr{B}}(f(a_1),\cdots,f(a_n))=t_2^{\mathscr{B}}(f(a_1'),\cdots,f(a_m'))$ 即 a 的象 $\bar{f}(a)$ 是唯一的。由 $f(a_1),\cdots,f(a_n)\in Y$ 知 $t^{\mathscr{B}}(f(a_1),\cdots,f(a_n))\in\mathscr{H}(Y)$，因此 $\bar{f}$ 是 $\mathscr{H}(X)$ 到 $\mathscr{H}(Y)$ 内的映射。

我们再来证明 $\bar{f}$ 是 $\mathscr{H}(X)$ 到 $\mathscr{H}(Y)$ 内的初等嵌入. 设 $\varphi(v_1,\cdots,v_n)$ 是 $\mathscr{L}$ 的一个公式，$b_1,\cdots,b_m\in\mathscr{H}(x)$，我们只要证明

(1) 若 $\mathscr{H}(X)\models\varphi[b_1,\cdots,b_m]$ 则 $\mathscr{H}(Y)\models\varphi[\bar{f}(b_1),\cdots,\bar{f}(b_m)]$。

设 $b_1, \cdots, b_m$ 的标准表示分别是 $t_1^{\mathscr{U}}(a_1, \cdots, a_n), \cdots, t_m^{\mathscr{U}}(a_1, \cdots, a_n)$，其中 $a_1, \cdots, a_n \in X$，$a_1 < \cdots < a_n$. 令

$$\psi(x_1, \cdots, x_n) = \varphi(t_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, t_m(x_1, \cdots, x_n)).$$

即 ψ 是公式 $\varphi(v_1, \cdots, v_m)$ 中用项 $t_1, \cdots, t_m$ 分别同时代换 $v_1, \cdots, v_m$ 得到的公式，其中 $x_1, \cdots, x_n$ 是 ψ 中不出现的个体变元. 这样 $\mathscr{H}(X) \models \psi[b_1, \cdots, b_m]$ 当且仅当 $\mathscr{H}(X) \models \psi[a_1, \cdots, a_n]$ 当且仅当 $\mathscr{U} \models \psi[a_1, \cdots, a_n]$。由于 f 是 X 到 Y 内的序同构嵌入，因此有 $f(a_1) < \cdots < f(a_n)$. 由题设 X、Y 中的序列满足同样的公式，因此有 $\mathscr{B} \models \psi[f(a_1), \cdots, f(a_n)]$. 而由 ψ 的定义，又有 $\mathscr{B} \models \psi(t_1(f(a_1), \cdots, f(a_n)), \cdots, t_m(f(a_1), \cdots, f(a_n)))$，再有 $\bar{f}$ 的定义及 $t_1, \cdots, t_m$ 是 $b_1, \cdots, b_m$ 的标准表示有

$\bar{f}(b_1) = t_1^{\mathscr{B}}(f(a_1) \cdots f(a_n)) \cdots \bar{f}(b_m) = t_m^{\mathscr{B}}(f(a_1) \cdots f(a_n))$，因此 $\mathscr{B} \models \varphi(\bar{f}(b), \cdots, \bar{f}(b_m))$. 最后再由 $\bar{f}(b_1), \cdots, \bar{f}(b_m))$ 都是 $\mathscr{H}(Y)$ 中元素及 $\mathscr{H}(Y) \prec \mathscr{B}$，又有

$$\mathscr{H}(Y) \models \varphi[\bar{f}(b_1), \cdots, \bar{f}(b_m)]。$$

这样 (1) 成立，因此 $\mathscr{H}(X) \preccurlyeq \mathscr{H}(Y)$。

我们还要证明 $\bar{f}$ 是唯一的. 设 g 是 $\mathscr{H}(X)$ 到 $\mathscr{H}(Y)$ 的初等嵌入，对 $a \in X$，$g(a) = f(a)$。设 $a \in \mathscr{H}(X)$，

$a = t^{\mathscr{U}}(a_1, \cdots, a_n)$ 是 a 的标准表示，由于 g 是初等嵌入，因此必有 $g(a) = t^{\mathscr{B}}(g(a_1), \cdots, g(a_n)) = t^{\mathscr{B}}(f(a_1), \cdots, f(a_n)) = \bar{f}(a)$

这说明 $g = \bar{f}$. 因此 $\bar{f}$ 是唯一的。

最后我们证明 $\bar{f}$ 的值域是 $H(f[X])$。设元素 $b \in H(f[X])$. 即存在 $\mathscr{L}$ 的项 $t(v_1, \cdots, v_n)$，以及 $a_1, \cdots, a_n \in X$，$f(a_1), \cdots, f(a_n) \in f[X]$ 使 $b = t^{\mathscr{B}}(f(a_1), \cdots, f(a_n))$，适当调整次序可使 $a_1 < \cdots < a_n$，这样有 $a = t^{\mathscr{U}}(a_1, \cdots, a_n) \in \mathscr{H}(X)$ 使 $\bar{f}(a) = b$，因此 $\bar{f}$ 是以 $\mathscr{H}(X)$ 到 $H(f[X])$ 上的映射。 ▌

在命题 11.2.5 中 Y 取 X 自身就得到如下推论.

推论 11.2.6 设$\mathscr{L}$具有内在的 Skolem 函数，T 是$\mathscr{L}$的具有内在 Skolem 函数的理论，$\mathscr{L}$的模型$\mathscr{U}\models T$，X是$\mathscr{U}$的不可辨元集，设f是X到其自身的序同构映射，则f可以唯一地扩充为$\mathscr{H}(X)$到$\mathscr{H}(X)$上的自同构映射。 ▌

这个推论说明不可辨元集的序同构可以扩充为其 Skolem 壳的自同构映射。但一般说来，未必能扩充到模型本身的自同构映射。

命题 11.2.7 设$\mathscr{L}$具有内在的 Skolem 函数，T是具有内在 Skolem 函数的理论，$\mathscr{U}$，$\mathscr{B}\models T$，X，Y分别是$\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$的无限不可辨元集，X，Y中任意有限同长的递增序列满足的公式都相同，则对$\mathscr{L}$的任何一个型$\Gamma(x_1\cdots x_n)$，$\mathscr{H}(X)$实现Γ当且仅当$\mathscr{H}(Y)$实现Γ.

证明 设存在d_1，…，$d_n\in\mathscr{H}(X)$，实现型$\Gamma(x_1\cdots x_n)$即$\mathscr{H}(X)\models\Gamma[d_1\cdots d_n]$。设$d_1=t_1^{\mathscr{U}}(a_1\cdots a_m)$，…，$d_n=t_n^{\mathscr{U}}(a_1\cdots a_m)$都是标准表示，$a_1<\cdots<a_m$是$x$中一个递增序列。任取一个从$X$到$Y$的序同构嵌入$f$，令$f(a_1)=b_1$，…，$f(a_m)=b_m$，由命题 11.2.3 $\{a_1, \cdots, a_m\}\subset X$是$\mathscr{H}(X)$的不可辨元集，$\mathscr{H}(\{a_1,\cdots,a_m\})\prec\mathscr{H}(X)$，同样$\{b_1, \cdots, b_m\}\subset Y$也是$\mathscr{H}(Y)$的不可辨元集，$\mathscr{H}(\{b_1, \cdots, b_m\})\prec\mathscr{H}(Y)$。由$f$保序，因此$b_1<\cdots<b_m$，由题设$\{a_1, \cdots, a_m\}$和$\{b_1, \cdots, b_m\}$的任意同长的递增有限序列满足相同的公式，由命题 11.2.5，f可以唯一地扩充为$\mathscr{H}(\{a_1, \cdots, a_m\})$到$\mathscr{H}(\{b_1, \cdots, b_m\})$上的同构映射，即

$$\mathscr{H}(\{a_1, \cdots, a_m\})\cong\mathscr{H}(\{b_1, \cdots, b_m\})$$

由于d_1，…，$d_n\in\mathscr{H}(\{a_1, \cdots, a_m\})$及$\mathscr{H}(X)\prec\mathscr{U}$，有$\mathscr{H}(\{a_1, \cdots, a_m\})\prec\mathscr{U}$，因此$\mathscr{H}(\{a_1, \cdots, a_m\})$实现$\Gamma$。这样$\mathscr{H}(\{b_1, \cdots, b_m\})$也实现$\Gamma$，从而$\mathscr{H}(Y)$也实现$\Gamma$。反过来也完全一样。 ▌

设$\langle X、<\rangle$是无端点稠密线性序，容易看出X到其自身有

无限多个序同构映射，实际上只要任取 X 中两个元素 a、b 都可以有一个序同构 f，使 $f(a)=b$，当 X 取任意大集的时候，$\langle X, <\rangle$ 有任意大的自同构群，现在可以来证明本节的目标。

定理 11.2.8 设 $\mathscr{U}$ 是一个无限模型，则 $\mathscr{U}$ 有初等扩充模型有任意大的自同构群。

证明 令 $\overline{\mathscr{L}}$ 是 $\mathscr{L}$ 的膨胀语言，$\overline{\mathscr{L}}$ 具有内在 Skolem 函数，$\mathscr{U}^*$ 是 $\mathscr{U}$ 的膨胀模型，使 Th$\mathscr{U}^*$ 是有内在的 Skolem 函数的模型，令 $\mathscr{L}^*=\overline{\mathscr{L}}\cup\{c_a: a\in A\}$，$T$ 是 $\mathscr{U}^*$ 的初等图象，则 T 是具有内在 skolem 函数的理论，T 有无限模型 $(\mathscr{U}^*, a)_{a\in A}$。由定理 11.2.2 T 有一个模型 $\mathscr{B}$，使无端点稠密线性序 $\langle X, <\rangle$ 是 $\mathscr{B}$ 的不可辨元集。由命题 11.1.4 X 生成的 Skolem 壳 $\mathscr{H}(X)\prec\mathscr{B}$，因此 $\mathscr{H}(X)\models T$，这样 $\mathscr{H}(X)$ 在 $\mathscr{L}$ 中的归约模型是 $\mathscr{U}$ 的初等扩充。由推论 11.2.6 X 的任何一个序同构都可以唯一地扩充为 $\mathscr{H}(X)$ 的自同构。由于 X 有任意大序同构群，因此 $\mathscr{H}(X)$ 也有任意大序同构群。 ▌

Skolem 函数和不可辨元集还有许多应用，我们举一例如下。

命题 11.2.9 设 $\mathscr{L}$ 是可数语言，$\mathscr{L}$ 的理论 T 有无限模型，则 $\mathscr{L}$ 中存在可数多个型的族 Δ，使 T 有任意大的模型恰满足 Δ 中的型。

证明 设 $\overline{\mathscr{L}}$ 是 $\mathscr{L}$ 的膨胀语言，$\overline{\mathscr{L}}$ 有内在的 Skolem 函数，$\overline{T}$ 是 T 的扩充，$\overline{T}$ 是 $\overline{\mathscr{L}}$ 的具有内在 Skolem 函数的理论，T 的无限模型可以膨胀为 $\overline{T}$ 的模型。设 $\langle X, <\rangle$ 是一个全序集，$|X|=\omega$。由定理 11.2.2 $\overline{T}$ 有模型 $\mathscr{U}$，X 是 $\mathscr{U}$ 的不可辨元集。由命题 11.1.4 X 生成的 Skolem 壳 $\mathscr{H}(X)\prec\mathscr{U}$，因此 $\mathscr{H}(X)$ 也是 $\overline{T}$ 的模型，由 $\mathscr{L}$ 可数知 $\overline{\mathscr{L}}$ 也可数。由命题 11.1.4 $H(X)$ 也是可数集，因此 $\mathscr{H}(X)$ 实现 $\overline{\mathscr{L}}$ 中至多可数多个型。由命题 11.2.4 不可辨元集的伸长定理，对任意大的全序集 Y，都有模型 $\mathscr{B}\models\overline{T}$，使 Y 是 $\mathscr{B}$ 的不可辨元集，而且 X，Y 中同长的有限递增序列满足的公式相同，

由命题 11.2.7 $\mathscr{H}(Y)$ 与 $\mathscr{H}(X)$ 实现的型全都相同，而 $\mathscr{H}(Y)\prec\mathscr{B}$，因此 $\mathscr{H}(Y)\models\overline{T}$，$\mathscr{H}(Y)$ 与 $\mathscr{H}(X)$ 在 $\mathscr{L}$ 中的归约都是 T 的模型，实现的 $\mathscr{L}$ 中的型都相同，以 $\mathscr{H}(X)$ 的 $\mathscr{L}$ 归约实现的型的族为 Δ，$\mathscr{H}(Y)$ 可以是任意大的模型，实现的型恰属于 Δ，∎

练习

11.2.1　设 X 是 $\mathscr{U}$ 的不可辨元集，证明 $\langle X、<\rangle$ 的每个序自同构都可以扩充为 $\mathscr{H}(X)$ 的自同构，$\langle X、<\rangle$ 的自同构群同构嵌入 $\mathscr{H}(X)$ 的自同构群。

11.2.2　设 α 是一个无限基数，证明存在势 α 的全序集 X 有 2^α 多个序自同构。

11.2.3　设 T 是 $\mathscr{L}$ 的一个有无限模型的理论，证明对每个无限基数 α，T 有势 α 的模型有 2^α 个自同构。

11.2.4　设 $\mathscr{L}$ 可数，T 是 $\mathscr{L}$ 的具有内在 Skolem 函数的理论，证明对每个无限基数 α，T 有势 α 的模型 $\mathscr{U}$，且对 A 的每个子集 $B\subset A$，$(\mathscr{U}, b)_{b\in B}$至多实现膨胀语言 $\mathscr{L}\cup\{c_b: b\in B\}$ 中 $|B|\cup\omega$个型。

第十二章　模型论力迫法

§12.1　有限力迫法

六十年代初，P. J. Cohen 创造了集合论力迫法，他用这种力迫法证明了连续统假设与 ZFC 公理系统的和谐性和独立性。六十年代末，A. Robinson 把力迫法引进模型论，给出了模型论中的有限力迫和无限力迫两种方法. Keisler 用有限力迫法证明了省略型定理，并给出了广义量词逻辑的模型论力迫法，后来各种各样模型论力迫法层出不穷。由此引出的概念，力迫伴随理论，模型伴随理论等使模型论研究开拓了一个新的方向。本章介绍有限力迫与无限力迫方法的一些基本概念。

设 $\mathscr{L}$ 是一个形式语言，C 是不在 $\mathscr{L}$ 中出现的无限新常量集，记 $\mathscr{L}(C)$ 为 $\mathscr{L}$ 的简单膨胀 $\mathscr{L}\cup C$. 设 T 是语言 $\mathscr{L}$ 中的一个和谐理论，任取 $\mathscr{L}(C)$ 中有限多个原子句或原子句的否定组成的集合 p. 如果 $T\cup p$ 是 $\mathscr{L}(C)$ 中和谐句子集，就称 p 是理论 T 在 $\mathscr{L}(C)$ 中的一个**条件**，不引起歧义时也称 p 是 T 的条件，或称 p 是条件. 特别我们约定空集 $\varnothing$ 也看作是一个条件. 我们常以 p，q，r 或 p_1，q_1，q_2 等等来表示 T 的条件。

设 φ 是 $\mathscr{L}(C)$ 的一个句子，称 T 的条件 p **有限力迫** φ，记作 $p\Vdash_{T,\mathscr{L}(C)}\varphi$，或简记作 $p\Vdash\varphi$，归纳定义如下：

(1) φ 是原子句，$p\Vdash\varphi$ 当且仅当 $\varphi\in p$；

(2) $\varphi=\psi_1\vee\psi_2$，$p\Vdash\psi_1\vee\psi_2$ 当且仅当 $p\Vdash\psi_1$，或 $p\Vdash\psi_2$；

(3) $\varphi=\exists x\psi(x)$，$p\Vdash\psi$ 当且仅当存在 $c\in C$ 使 $p\Vdash\psi(c)$；

(4) $\varphi=\neg\psi$，$p\Vdash\varphi$ 当且仅当不存在条件 q，$q\supset p$，$q\Vdash\psi$.

这里我们把 $\neg$，$\vee$，$\exists$ 当成基本符号，而把 $\rightarrow$，$\wedge$，$\forall$ $\leftrightarrow$ 当

作由基本符号导出的公式的简写。

命题 12.1.1

(i) 若 $p \Vdash \psi$，$q \supset p$，则 $q \Vdash \psi$；

(ii) 对任意 ψ，p 不能同时力迫 ψ 和 $\neg\psi$；

(iii) 若 $\psi \in p$，则 $p \Vdash \psi$；

(iv) 若 ψ 是原子句或原子句的否定，$p \Vdash \psi$，则 $p \cup \{\psi\}$ 也是 T 的条件。

证明 对 ψ 的复杂性归纳容易证明(i). 由 $p \Vdash \neg\psi$ 的定义可知 (ii) 成立。

(iii) 若 ψ 是原子句，由定义及 $\psi \in p$，必有 $p \Vdash \psi$，若 ψ 是原子句的否定，$\psi = \neg\varphi$，φ 是原子句，由 $\psi \in p$，则对任意 $q \supset p$，$\varphi \notin q$，因此 $q \nVdash \varphi$，由定义必有 $p \Vdash \neg\varphi$，即 $p \Vdash \psi$.

(iv) 若 ψ 是原子句，由 $p \Vdash \psi$，必有 $\psi \in p$，因此 $p \cup \{\psi\} = p$ 是 T 的条件. 若 $\psi = \neg\varphi$，φ 是原子句，由 $p \Vdash \neg\varphi$ 知 $p \cup \{\varphi\}$ 不是 T 的条件，否则可令 $q = p \cup \{\varphi\}$，得 $q \Vdash \varphi$ 与 $p \Vdash \neg\varphi$ 矛盾. 这样 $p \cup \{\varphi\}$ 与 T 不和谐。因此 $T \cup p \vdash \neg\varphi$，从而 $p \cup \{\neg\varphi\}$ 与 T 和谐。即 $p \cup \{\psi\}$ 也是 T 的条件。 ▎

我们看到，力迫关系与一阶语言 $\mathscr{L}$，$\mathscr{L}$ 的理论 T 和新常量集 C 有关. 但实际上，新常量集 C 在力迫关系中并无实质性作用，下面的命题说明对两个不同的无限新常量集 C，C'，如果 $C \subset C'$，对 $\mathscr{L}(C)$ 中的条件 p，和句子 φ，p 在 $\mathscr{L}(C)$ 中力迫 φ 与 p 在 $\mathscr{L}(C')$ 中力迫 φ 是一致的. 因此力迫关系与新常量集的势无关，而对不同的新常量集，除了符号不同之外，并没有具体意义上的区别。这样，对任意的一阶语言 $\mathscr{L}$，任意的理论 T，可以任取一个可数无限新常量集 C，在 $\mathscr{L}(C)$ 中考虑力迫关系。

命题 12.1.2 设 C，C' 都是不在 $\mathscr{L}$ 中出现的无限新常量集，$C \subset C'$，设 T 是 $\mathscr{L}$ 中和谐理论，p 是 T 在 $\mathscr{L}(C)$ 中的一个条件，φ 是 $\mathscr{L}(C)$ 中一个句子. 则 $p \Vdash_{\mathscr{L}(C)} \varphi$ 当且仅当 $p \Vdash_{\mathscr{L}(C')} \varphi$.

证明 易见若 p 是 T 在 $\mathscr{L}(C)$ 中的条件，则 p 必也是 T 在 $\mathscr{L}(C')$ 中的条件. 这里 $p \Vdash_{\mathscr{L}(C)} \varphi$，和 $p \Vdash_{\mathscr{L}(C')} \varphi$ 分别表示在 $\mathscr{L}(C)$ 中和在 $\mathscr{L}(C')$ 中 p 力迫 φ.

设 q 是 T 在 $\mathscr{L}(C')$ 中的一个条件，φ 是 $\mathscr{L}(C')$ 中一个句子. 由于 q 是 $\mathscr{L}(C')$ 中有限句子集，q 中至多只有有限多个新常量，因此 q 和 φ 中只有有限多个新常量属于 C' 而不属于 C. 记 q 和 φ 为 $q(c'_1, \cdots, c'_n)$ 和 $\varphi(c'_1, \cdots, c'_n)$. 其中 $c'_1, \cdots, c'_n$ 是 q 和 φ 中出现的属于 C' 而不属于 C 的全体新常量. 因 C 是无限集，可以取到 $c_1, \cdots, c_n \in C$ 使之不在 q 和 φ 中出现，以 $c_1, \cdots, c_n$ 分别代换 q 和 φ 中的 $c'_1, \cdots, c'_n$ 得到 $q(c_1, \cdots, c_n)$ 和 $\varphi(c_1, \cdots, c_n)$，不难看出这样得到的 $q(c_1, \cdots, c_n)$ 是 T 在 $\mathscr{L}(C)$ 中的条件。对 φ 的复杂性归纳又容易知道

$q(c_1, \cdots, c_n) \Vdash_{\mathscr{L}(C)} \varphi(c_1, \cdots, c_n)$ 当且仅当

$q(c'_1, \cdots, c'_n) \Vdash_{\mathscr{L}(C)} \varphi(c'_1, \cdots, c'_n)$

现在我们对句子 φ 的复杂性归纳证明

$p \Vdash_{\mathscr{L}(C)} \varphi$ 当且仅当 $p \Vdash_{\mathscr{L}(C')} \varphi$

对 φ 是原子句，$\varphi = \psi_1 \vee \psi_2$ 的情况容易证明。设 $\varphi = \exists x \psi(x)$，如果 $p \Vdash_{\mathscr{L}(C)} \varphi$，则存在 $c \in C$，$p \Vdash_{\mathscr{L}(C)} \psi(c)$，由归纳假设有 $p \Vdash_{\mathscr{L}(C')} \psi(c)$. 因此 $p \Vdash_{\mathscr{L}(C')} \exists x \psi(x)$，即 $p \Vdash_{\mathscr{L}(C')} \varphi$。反过来，如果有 $p \Vdash_{\mathscr{L}(C')} \varphi$，则存在 $c' \in C'$、使 $p \Vdash_{\mathscr{L}(C')} \psi(c')$. 由上一段说明知存在 $c \in C$，用 c 代换 c' 得 $p \Vdash_{\mathscr{L}(C)} \psi(c)$，这样仍有 $p \Vdash_{\mathscr{L}(C)} \varphi$.

设 $\varphi = \neg \psi$，如果 $p \Vdash_{\mathscr{L}(C')} \neg \psi$，则对 T 在 $\mathscr{L}(c')$ 中的任意条件 $q \supset p$，$q \nVdash_{\mathscr{L}(c')} \psi$，当然对 T 在 $\mathscr{L}(c)$ 中的任意条件 $q \supset p$，也有 $q \nVdash_{\mathscr{L}(c')} \psi$，由归纳假设 $q \nVdash_{\mathscr{L}(c)} \psi$，因此 $p \Vdash_{\mathscr{L}(c)} \neg \psi$. 反之，如果 $p \nVdash_{\mathscr{L}(c')} \neg \psi$，则存在 T 在 $\mathscr{L}(c')$ 中的条 $q \supset p$，$q \Vdash_{\mathscr{L}(c')} \psi$，由前段

说明，可以用C中常量代换q中不在C中出现的C'中常量得到条件$q'\supset p$，有$q' \underset{\mathscr{L}(c)}{\Vdash} \psi$，从而$p \underset{\mathscr{L}(c)}{\not\Vdash} \neg\psi$完成归纳证明。 ▌

设T是语言$\mathscr{L}$的一个理论，以$T_\forall$记理论T的全称推论的全体，即$T_\forall=\{\varphi\in\Pi_1;\ T\vdash\varphi\}$.

命题 12.1.3 设T是$\mathscr{L}$的一个理论，p是T的条件当且仅当p是$T_\forall$的条件，对$\mathscr{L}(C)$中任意句子φ，有$p\underset{T}{\Vdash}\varphi$当且仅当$p\underset{T_\forall}{\Vdash}\varphi$.

证明 设p是T的条件，即$T\cup p$和谐，显见有$T_\forall\cup p$和谐，因此p是$T_\forall$的条件. 设p是$T_\forall$的条件，则$T_\forall\cup p$和谐，有模型$\mathscr{U}\models T_\forall\cup p$，由命题4.3.4有模型$\mathscr{B}\supset\mathscr{U}$，$\mathscr{B}\models T$，由于$p$中句子都没有量词，因此也有$\mathscr{B}\models p$. 这样$\mathscr{B}\models T\cup p$，从而$T\cup p$和谐，因此$p$也是$T$的条件。

以上说明T在$\mathscr{L}(C)$中的条件与$T_\forall$在$\mathscr{L}(C)$中的条件是完全相同的，而力迫关系完全由条件集确定，不难看出$p\underset{T}{\Vdash}\varphi$当且仅当$p\underset{T_\forall}{\Vdash}\varphi$. ▌

设p是T的一个条件，φ是$\mathscr{L}(C)$的一个句子，如果$p\Vdash\neg\neg\varphi$就称p**弱力迫**φ，记作$p\Vdash^*\varphi$. 不难看出$p\Vdash^*\varphi$当且仅当对任意条件$q\supset p$，$q\not\Vdash\neg\varphi$，即对任意条件$q\supset p$，存在$r\supset q$，$r\Vdash\varphi$.

由弱力迫的定义，只要$p\Vdash\varphi$就一定有$p\Vdash^*\varphi$。对任意句子φ，p不能同时弱力迫φ和$\neg\varphi$.

弱力迫比力迫有更好的性质，因此使用更方便. 下面命题的证明留给读者.

命题 12.1.4

(i) 若$p\Vdash^*\varphi$，$q\supset p$，则$q\Vdash^*\varphi$；

(ii) $p\Vdash^*\neg\varphi$当且仅当$p\Vdash\neg\varphi$；

(iii) $p\Vdash\forall x\psi(x)$当且仅当对任意$c\in C$，$p\Vdash^*\psi(c)$.

设 T 是 $\mathscr{L}$ 的一个和谐理论，p 是 $\mathscr{L}(C)$ 中 T 的一个条件. 令 $T^f(p)=\{\varphi\in\mathscr{L}: p\Vdash^* \varphi\}$ 表示 $\mathscr{L}$ 中能被 p 弱力迫的全体句子的集合. 当 $p=\varnothing$ 时，记 $T^f(\varnothing)=T^f$，称 T^f 为 T 的**有限力迫伴随理论**，注意 $T^f(p)$ 和 T^f 都是 $\mathscr{L}$ 的句子集，而不是 $\mathscr{L}(C)$ 的句子集。

由命题 12.1.3 可知，对任意和谐理论 T，T 和 $T_\forall$ 有完全相同的条件集，有完全相同的力迫关系，因此 T 和 $T_\forall$ 有完全相同的有限力迫伴随理论。

命题 12.1.5 $T^f=(T_\forall)^f$.

对 $\mathscr{L}(C)$ 中的存在句与全称句，力迫关系有特殊的语义和语法意义。

命题 12.1.6 设 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{L}$ 的一个模型，$\mathscr{U}\models T$，设 φ 是 $\mathscr{L}(A)$ 中任意一个存在句，$\mathscr{U}\models\varphi$ 当且仅当存在一个有限集 $p\subset\Delta_{\mathscr{U}}$，使 $p\Vdash\varphi$.

证明 由 $\mathscr{U}\models T$ 知 $\Delta_{\mathscr{U}}$ 的任意有限子集都是 T 在 $\mathscr{L}(A)$ 中的条件. 对存在句 φ 的复杂性归纳，设 φ 是原子句，$\mathscr{U}\models\varphi$，令 $p=\{\varphi\}$，则 $p\subset\Delta_{\mathscr{U}}$，$p\Vdash\varphi$；如果存在 $p\subset\Delta_{\mathscr{U}}$，$p\Vdash\varphi$，则 $\varphi\in p$，因此 $\mathscr{U}\models\varphi$.

设 $\varphi=\neg\psi$，ψ 是原子句，如果 $\mathscr{U}\models\varphi$，令 $p=\{\neg\psi\}$ 则显然有 $p\Vdash\varphi$. 如果 $\mathscr{U}\not\models\varphi$，则 $\mathscr{U}\models\psi$，$\psi\in\Delta_{\mathscr{U}}$，这时任意有限子集 $p\subset\Delta_{\mathscr{U}}$，令 $q=p\cup\{\psi\}\subset\Delta_{\mathscr{U}}$，有 $q\Vdash\psi$. 从而 $p\nVdash\varphi$.

设 $\varphi=\psi_1\vee\psi_2$，如果 $\mathscr{U}\models\varphi$，则 $\mathscr{U}\models\psi_1$ 或 $\mathscr{U}\models\psi_2$. 由归纳假设存在 $p_1\subset\Delta_{\mathscr{U}}$，$p_1\Vdash\psi_1$ 或 $p_1\Vdash\psi_2$. 因此 $p_1\Vdash\psi_1\vee\psi_2$ 即 $p_1\Vdash\varphi$；如果存在 $p\subset\Delta_{\mathscr{U}}$，$p\Vdash\varphi$，则 $p\Vdash\psi_1$ 或 $p\Vdash\psi_2$，有 $\mathscr{U}\models\psi_1$ 或 $\mathscr{U}\models\psi_2$，从而 $\mathscr{U}\models\varphi$.

设 $\varphi=\exists x\psi(x)$，如果 $\mathscr{U}\models\varphi$，则存在 $a\in A$，$\mathscr{U}\models\psi(a)$. 由归纳假设，存在 $p\subset\Delta_{\mathscr{U}}$，$p\Vdash\psi(a)$，从而有 $p\Vdash\exists x\psi(x)$；如果存在 $p\subset\Delta_{\mathscr{U}}$，$p\Vdash\exists x\psi(x)$，则存在 $c\in A$，使 $p\Vdash\psi(c)$，由归纳假设

$\mathscr{U}\models\psi(c)$；因此也有 $\mathscr{U}\models\exists x\psi(x)$。 ▌

命题 12.1.7 设 p 是 T 的一个条件，φ 是 $\mathscr{L}(C)$ 中一个全称句，则 $p\Vdash\varphi$ 当且仅当 $T\cup p\vdash\varphi$.

证明 设 $\varphi=\neg\psi$，则 ψ 是 $\mathscr{L}(C)$ 的一个存在句，如果 $p\nVdash\varphi$，则存在 $q\supset p$，$q\Vdash\psi$，取 $T\cup q$ 的一个模型 $\mathscr{U}$，由 $q\subset\Delta_{\mathscr{U}}$，由命题 12.1.6 可知 $\mathscr{U}\models\psi$. 因此有 $T\cup q\cup\{\psi\}$ 和谐. 即 $T\cup p\cup\{\neg\varphi\}$ 和谐，这样 $T\cup p\nvdash\varphi$.

反之，如果 $T\cup p\nvdash\varphi$. 则 $T\cup p\cup\{\psi\}$ 和谐，因此有 $\mathscr{L}(C)$ 的模型 $\mathscr{U}$，$\mathscr{U}\models T\cup p\cup\{\psi\}$。由命题 12.1.6 存在 $q\subset\Delta_{\mathscr{U}}$，$q\Vdash\psi$。易见 $p\subset\Delta_{\mathscr{U}}$，因此 $p\cup q$ 是 T 在 $\mathscr{L}(A)$ 中的条件，$p\cup q\Vdash\psi$，不难把 q 中不在 C 中出现的常量换成 C 中不在 $p\cup q$ 中出现的新常量，得到 T 在 $\mathscr{L}(C)$ 中的条件 $p\cup q'\Vdash\psi$，这样 $p\nVdash\neg\psi$，完成归纳。 ▌

练习

12.1.1 设 p 是 T 的一个条件，$\varphi=\forall x\psi(x)$ 是 $\mathscr{L}(C)$ 的一个句子. 证明：$p\Vdash\varphi$ 当且仅当对任意条件 $q\supset p$，任意 $c\in C$，存在 $r\supset q$，使 $r\Vdash\psi(c)$.

12.1.2 证明 $p\Vdash^*\varphi$ 当且仅当对任意 $q\supset p$，$q\nVdash\neg\varphi$ 当且仅当对任意 $q\supset p$，存在 $r\supset q$，$r\Vdash\varphi$.

12.1.3 证明命题 12. 1. 4.

12.1.4 设 T_1，T_2 是 $\mathscr{L}$ 的两个和谐理论，如果 $T_{1\forall}=T_{2\forall}$，证明 $T_1^f=T_2^f$.

12.1.5 证明 $T_\forall\subset T^f$. 设 $\mathscr{L}$ 的模型 $\mathscr{U}\models T^f$，则 $\mathscr{U}$ 可以扩充到 T 的模型，即存在 $\mathscr{B}\supset\mathscr{U}$，$\mathscr{B}\models T$.

12.1.6 设 p 是 T 的条件，φ 是原子句，$\neg\varphi\in p$，证明 $p\Vdash\neg\varphi$.

12.1.7 设 φ 是 $\mathscr{L}(C)$ 的任意一句子，证明 $\varphi\Vdash^*\varphi\vee\neg\varphi$.

12.1.8　设句子φ是$\mathscr{L}(C)$的任意一公理，证明$\varnothing\Vdash^{*}\varphi$.

12.1.9　设$p\Vdash^{*}\varphi$，$p\Vdash^{*}\varphi\to\psi$，证明$p\Vdash^{*}\psi$.

§12.2　有限力迫兼纳模型

设T是一阶语言$\mathscr{L}$的和谐理论，C是无限新常量集. 设G是膨胀语言$\mathscr{L}(C)$中原子句和原子句的否定组成的句子集. 如果G满足下列条件，就称G是T在$\mathscr{L}(C)$中的**兼纳集**。

（1）G的任意有限子集都是T的条件；

（2）对$\mathscr{L}(C)$中任意句子φ，都有$p\subset G$，使$p\Vdash\varphi$，或$p\Vdash\neg\varphi$。

设G是T在$\mathscr{L}(C)$中一个兼纳集，φ是$\mathscr{L}(C)$中一个句子，如果有$p\subset G$，$p\Vdash\varphi$，就称兼纳集G力迫φ，记作$G\Vdash\varphi$.

命题 12.2.1　设G是兼纳集，φ是$\mathscr{L}(C)$中一句子，则$G\Vdash\varphi$或$G\Vdash\neg\varphi$恰有一个成立。

证明　由兼纳集定义知$G\Vdash\varphi$，$G\Vdash\neg\varphi$至少有一个成立。设$G\Vdash\varphi$，$G\Vdash\neg\varphi$都成立，则有p，$q\subset G$，使$p\Vdash\varphi$，$q\Vdash\neg\varphi$，但$p\cup q\subset G$仍是G的有限集，因此仍是条件，这样$p\cup q\Vdash\varphi$且$p\cup q\Vdash\neg\varphi$，而这是不可能的，这就证明$G\Vdash\varphi$，$G\Vdash\neg\varphi$不能同时成立。 ▎

现在我们证明兼纳集G的存在性。

引理 12.2.2　设p是理论T的条件，φ是$\mathscr{L}(C)$的任意一个句子. 则存在$q\supset p$，使$q\Vdash\varphi$或$q\Vdash\neg\varphi$.

证明　如果$p\Vdash\neg\varphi$，令$q=p$；如果$p\nVdash\neg\varphi$，由定义知存在$q\supset p$，$q\Vdash\varphi$。 ▎

定理 12.2.3　（**兼纳集存在定理**）　设$\mathscr{L}$是可数语言，C是可数无限新常量集，T是$\mathscr{L}$的和谐理论，p是T在$\mathscr{L}(C)$中的条

件，则 T 在 $\mathscr{L}(C)$ 中有兼纳集 G，使得 $p\subseteq G$.

证明 列出 $\mathscr{L}(C)$ 中全部可数多个句子：

φ_0，φ_1，…，φ_n，…，$n<\omega$。

由引理 12.2.2 可以归纳构造 T 的条件的递增序列：

$p=p_0\subset p_1\subset p_2\subset\cdots\subset p_n\subset\cdots$，$n<\omega$，使对任意 $n<\omega$，有 $p_{n+1}\Vdash\varphi_n$ 或 $p_{n+1}\Vdash\neg\varphi_n$. 令 $G=\bigcup_{n<\omega}p_n$，G 中任意有限子集必包含于某个 p_n 中，因此是 T 的条件，这样 G 是 T 在 $\mathscr{L}(C)$ 中的兼纳集。▮

定理 12.2.3 中 $\mathscr{L}$ 可数这个条件是必不可少的，当 $\mathscr{L}$ 不可数时，S. Shelah 和 P. Henrard 给出反例说明和谐理论 T 可以没有兼纳集. 当然命题 12.1.2 说明定理中的 C 可以是不可数集。

引理 12.2.4 设 G 是兼纳集，则 G 有如下性质：

(1) 设 φ 是 $\mathscr{L}(C)$ 的原子句，如果 $\vdash\varphi$，则 $G\Vdash\varphi$；

(2) $G\Vdash\varphi$ 当且仅当 $G\nVdash\neg\varphi$，

$G\Vdash\varphi_1\vee\varphi_2$ 当且仅当 $G\Vdash\varphi_1$ 或 $G\Vdash\varphi_2$，

$G\Vdash\varphi_1\wedge\varphi_2$ 当且仅当 $G\Vdash\varphi_1$ 且 $G\Vdash\varphi_2$；

(3) 设 φ_1，…，φ_n，ψ 都是 $\mathscr{L}(C)$ 的原子句，且 $\vdash\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_n\rightarrow\psi$，$G\Vdash\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_n$，则 $G\Vdash\psi$；

(4) 对 $\mathscr{L}(C)$ 的任意一个闭项 t，存在 $c\in C$，$G\Vdash t\equiv c$.

证明 (1) 设 φ 是 $\mathscr{L}(C)$ 的原子句，但 $G\nVdash\varphi$，由 G 是兼纳集，必有 $G\Vdash\neg\varphi$，即存在条件 $p\subset G$，$p\Vdash\neg\varphi$，由命题 12.1.1，$p\cup\{\neg\varphi\}$ 和谐，因此 $\neg\varphi$ 是和谐句子，$\nvdash\varphi$.

(2) 都是显然的。

(3) 设 φ_1，…，φ_n，ψ 都是 $\mathscr{L}(C)$ 的原子句，$\vdash\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_n\rightarrow\psi$，$G\Vdash\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_n$，则存在条件 $p\subset G$，$p\Vdash\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_n$，因此 φ_1，…，$\varphi_n\in p$。设 $G\Vdash\neg\psi$，于是有 $q\subset G$，$q\Vdash\neg\psi$，但 $p\cup q\subset G$ 仍是有限子集，因此有 $p\cup q\Vdash\neg\psi$，再由命题 12.1.1 $p\cup q\cup\{\neg\psi\}$ 和谐. 但由 $\vdash\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_n\rightarrow\psi$，知 $p\cup q\vdash\psi$，因此

$p\cup q\cup\{\neg\psi\}$不和谐，得到矛盾．这就证明了必有$G\Vdash\psi$。

(4) 设t是$\mathscr{L}(C)$的任意一个闭项，我们证明$G\Vdash\exists x(t\equiv x)$。若$G\nVdash\exists x(t\equiv x)$，则$G\Vdash\neg\exists x(t\equiv x)$，因此有$p\subset G$，$p\Vdash\neg\exists x(t\equiv x)$。但$p$是有限集，必有常量$c\in C$，$c$不在$p$和$t$中出现，由$\vdash\exists x(t\equiv x)$知$T\cup p\cup\{t\equiv c\}$和谐．(否则$T\cup p\vdash\neg(t\equiv c)$由命题2.2.2有$T\cup p\vdash\forall x(\neg t\equiv x)$，即$T\cup p\vdash\neg\exists x(t\equiv x)$得到矛盾！) 令$q=p\cup\{t\equiv c\}$，则$q$是$T$的条件，$q\Vdash t\equiv c$，因此有$q\Vdash\exists x(t\equiv x)$，但由$p\subset q$又有$q\Vdash\neg\exists x(t\equiv x)$这是不可能的。这就证明了$G\Vdash\exists x(t\equiv x)$。因此，必有$c\in C$，使$G\Vdash t\equiv c$. ▌

现在我们可以证明兼纳模型的存在定理。

定理 12.2.5 **(兼纳模型的存在定理)** 设G是理论T在$\mathscr{L}(C)$中的兼纳集，则存在$\mathscr{L}(C)$的模型$\mathscr{U}$，使满足下列条件：

(i) $\mathscr{U}$的论域A中每个元素都是某个新常量符号$c\in C$的解释；

(ii) 对$\mathscr{L}(C)$中任意一个句子φ，$\mathscr{U}\models\varphi$当且仅当$G\Vdash\varphi$.

证明 定义常量集C上二元关系$\sim$如下：对任意c、$c'\in C$，$c\sim c'$当且仅当$G\Vdash c\equiv c'$．由引理12.2.4易见$\sim$是C上等价关系，对每个$c\in C$，令$\tilde{c}=\{c'\in C: c'\sim c\}$，$\tilde{c}$称为$c$所在的等价类，令$A=\{\tilde{c}: c\in C\}$，$A$是$C$的全体等价类的集合，我们以$A$为论域来构造$\mathscr{L}(C)$的模型$\mathscr{U}$.

(1) 设R是$\mathscr{L}$的n元关系符号，定义A上n元关系$R^{\mathscr{U}}$作R的解释，对任意$c_1,\cdots,c_n\in C$，

$R^{\mathscr{U}}(\tilde{c}_1,\cdots,\tilde{c}_n)$ 成立当且仅当 $G\Vdash R(c_1,\cdots,c_n)$

(2) 设F是$\mathscr{L}$的n元函数符号，定义A上n元函数$F^{\mathscr{U}}$作F的解释：对任意$c_1,\cdots,c_n\in C$，如果有$c\in C$，使$G\Vdash F(c_1,\cdots,c_n)\equiv c$，就令

$F^{\mathscr{U}}(\tilde{c}_1,\cdots,\tilde{c}_n)\equiv\tilde{c}$

(3) 设 d 是 $\mathscr{L}(C)$ 的常量符号，如果有 $c\in C$，使 $G\Vdash d\equiv c$，就令 $\tilde{c}$ 作 d 的解释。

因为 $F(c_1, \cdots, c_n)$ 是 $\mathscr{L}(C)$ 的闭项，由引理 12.2.4 中的 (4) 知必有 $c\in C$，使 $G\Vdash F(c_1,\cdots,c_n)\equiv c$，所以 (2) 定义 $F^{\mathscr{U}}$ 是 A 上的函数，同样常量符号 d 也是闭项. (3) 的定义也是有意义的，下面我们就以 (1) 为例说明上面定义的函数、关系和常量都与代表元取法无关.

设 R 是 $\mathscr{L}$ 上的 n 元关系符号，$c_1, \cdots, c_n, c_1', \cdots, c_n'\in C$，设 $c_1\sim c_1',\cdots,c_n\sim c_n'$，我们需要证明 $R^{\mathscr{U}}(\tilde{c}_1, \cdots, \tilde{c}_n)$ 成立当且仅当 $R^{\mathscr{U}}(\tilde{c}'_1, \cdots, \tilde{c}'_n)$ 成立。设 $R^{\mathscr{U}}(\tilde{c}_1,\cdots,\tilde{c}_n)$ 成立，即 $G\Vdash R(c_1,\cdots,c_n)$，由 $c_1\sim c_1', \cdots, c_n\sim c_n'$，知 $G\Vdash c_1\equiv c_1'\wedge\cdots\wedge c_n\equiv c_n'$，而

$\vdash c_1\equiv c_1'\wedge\cdots\wedge c_n\equiv c_n'\wedge R(c_1, \cdots, c_n)\rightarrow R(c_1', \cdots, c_n')$ 是 $\mathscr{L}(C)$ 的一条公理的等价形式. 由引理 12.2.4 (3) 可得 $G\Vdash R(c_1', \cdots, c_n')$，因此有 $R^{\mathscr{U}}(\tilde{c}_1', \cdots, \tilde{c}_n')$ 成立，反过来也是一样的. 函数、常量也可以类似证明，这样 (1)，(2)，(3) 都是良定义的.

我们以 A 为论域构造出了 $\mathscr{L}(C)$ 的一个模型 $\mathscr{U}$，易见 $\mathscr{U}$ 已经满足要求 (i). 下面证明 $\mathscr{U}$ 满足要求 (ii).

对 $\mathscr{L}(C)$ 的句子的复杂性归纳证明.

$\mathscr{U}\models\varphi$ 当且仅当 $G\Vdash\varphi$

对 $\mathscr{L}(C)$ 中项的复杂性归纳可以证明对任意闭项 t，都存在 $c\in C$，使 $t^{\mathscr{U}}=\tilde{c}$ 当且仅当 $G\Vdash t\equiv c$.

设 φ 是原子句 $t_1\equiv t_2$，t_1，t_2 是 $\mathscr{L}(C)$ 的闭项，由 $\mathscr{U}$ 的定义知存在 $c_1, c_2\in C$，使 $t_1^{\mathscr{U}}=\tilde{c}_1$，$t_2^{\mathscr{U}}=\tilde{c}_2$ 即存在 A 中 $\tilde{c}_1$，$\tilde{c}_2$ 分别是项 t_1，t_2 的解释，我们有

$\mathscr{U}\models t_1\equiv t_2$ 当且仅当 $t_1^{\mathscr{U}}=t_2^{\mathscr{U}}$ 当且仅当 $\tilde{c}_1=\tilde{c}_2$ 当且仅当 $c_1\sim c_2$ 当且仅当 $G\Vdash c_1\equiv c_2$.

由 $t_1^{\mathscr{U}}=\tilde{c}_1$，$t_2^{\mathscr{U}}=\tilde{c}_2$，有 $G\Vdash t_1\equiv c_1$，$G\Vdash t_2\equiv c_2$. 由引理 12.2.4

(3) 不难证明$G\|\!\!-c_1\equiv c_2$ 当且仅当$G\|\!\!-t_1\equiv t_2$。这样 $\mathscr{U}\models t_1\equiv t_2$ 当且仅当$G\|\!\!-t_1\equiv t_2$.

设 φ 是原子句子 $R(t_1, \cdots, t_n)$, $t_1, \cdots, t_n$ 是 $\mathscr{L}(C)$ 的闭项，设 $t_1^{\mathscr{U}}=\bar{c}_1, \cdots, t_n^{\mathscr{U}}=\bar{c}_n$. 其中 $c_1, \cdots, c_n\in C$, $\mathscr{U}\models R(t_1, \cdots, t_n)$ 当且仅当 $R^{\mathscr{U}}(t_1^{\mathscr{U}}, \cdots, t_n^{\mathscr{U}})$ 成立. 即 $R^{\mathscr{U}}(\bar{c}_1, \cdots, \bar{c}_n)$ 成立. 当且仅当$G\|\!\!-R(c_1, \cdots, c_n)$. 类似可证

$G\|\!\!-R(c_1, \cdots, c_n)$ 当且仅当 $G\|\!\!-R(t_1, \cdots, t_n)$。

因此 $\mathscr{U}\models R(t_1, \cdots, t_n)$ 当且仅当$G\|\!\!-R(t_1, \cdots, t_n)$.

设 $\varphi=\neg\psi$, $\mathscr{U}\models\neg\psi$ 当且仅当 $\mathscr{U}\not\models\psi$ 当且仅当 $G\|\!\!\not-\psi$, 当且仅当$G\|\!\!-\neg\psi$.

设 $\varphi=\psi_1\vee\psi_2$ 时显然成立。

设 $\varphi=\exists x\psi(x)$. $\mathscr{U}\models\varphi$ 当且仅当存在 $c\in C$, $\mathscr{U}\models\psi\,[\bar{c}]$, 即 $\mathscr{U}\models\psi(c)$当且仅当$G\|\!\!-\psi(c)$ 当且仅当$G\|\!\!-\exists x\psi(x)$.

这样归纳证明了 $\mathscr{U}\models\varphi$ 当且仅当 $G\|\!\!-\varphi$, $\mathscr{U}$ 满足 (ii)。 ▌

我们常称满足定理 12.2.5 (i), (ii) 的模型 $\mathscr{U}$ 为 G 生成的**兼纳模型**，有时以 $\mathscr{U}(G)$ 表示 G 生成的兼纳模型. $\mathscr{U}(G)$ 在 $\mathscr{L}$ 中的归约也叫做 T 的兼纳模型，下面这个定理表明同一个 G 生成的兼纳模型在同构的意义下是唯一的。

定理 12.2.6 (兼纳模型的唯一性定理) 设 G 是理论 T 在 $\mathscr{L}(C)$中的兼纳集. $\mathscr{U}_1$, $\mathscr{U}_2$ 都是 $\mathscr{L}(C)$ 中由 G 生成的兼纳模型，则 $\mathscr{U}_1\cong\mathscr{U}_2$.

证明 定义 $f: A_1\to A_2$ 是论域 A_1 到 A_2 上的一个映射，对任意 $a\in A_1$, $b\in A_2$

$f(a)=b$ 当且仅当 a、b 是 C 中同一常量 c 的解释.

由于 A_1, A_2 中每个元素都是 C 中某常量的解释，所以 f 是满射，设 $a_1, a_2\in A_1$, $a_1\neq a_2$, 则有 $c_1, c_2\in C$, $a_1=c_1^{\mathscr{U}_1}$, $a_2=c_2^{\mathscr{U}_2}$, $c_1^{\mathscr{U}_1}\neq c_2^{\mathscr{U}_1}$, 因此$G\|\!\!-c_1\not\equiv c_2$. 这样 $c_1^{\mathscr{U}_2}\neq c_2^{\mathscr{U}_2}$, 因此 $f(a_1)\neq f(a_2)$, f 是一一映射.

设 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 是 $\mathscr{L}(C)$ 的一个公式，$a_1, \cdots, a_n \in A_1$，如果 $\mathscr{U}_1 \models \varphi[a_1, \cdots, a_n]$，则有 $c_1, \cdots, c_n \in C$，使 $\mathscr{U}_1 \models \varphi(c_1, \cdots, c_n)$，因此有 $G \Vdash \varphi(c_1, \cdots, c_n)$，这时 $a_1 = c_1^{\mathscr{U}_1}, \cdots, a_n = c_n^{\mathscr{U}_1}$。现在又有 $\mathscr{U}_2 \models \varphi(c_1, \cdots, c_n)$，从而 $\mathscr{U}_2 \models \varphi[f(a_1), \cdots, f(a_n)]$，反过来也成立，这样映射 f 是 $\mathscr{U}_1$ 到 $\mathscr{U}_2$ 的同构映射，$\mathscr{U}_1 \cong \mathscr{U}_2$. ▌

兼纳模型是对力迫关系定义的，但对弱力迫有类似的性质。

命题 12.2.7 设 $\mathscr{U}$ 是 G 生成的兼纳模型，条件 $p \subset G$，若 $p \Vdash^* \varphi$，则 $\mathscr{U} \models \varphi$，特别 $\mathscr{U} \models T^f$.

证明 设 $p \subset G$. $p \Vdash^* \varphi$. 如果 $\mathscr{U} \not\models \varphi$，则 $\mathscr{U} \models \neg\varphi$. 由 $\mathscr{U}$ 是兼纳模型，有 $G \Vdash \neg\varphi$. 因此有 $q \subset G$，$q \Vdash \neg\varphi$. 但 $p \cup q$ 仍是 G 的条件，因此 $p \cup q \Vdash \neg\varphi$. 这与 $p \Vdash^* \varphi$ 矛盾！因此必有 $\mathscr{U} \models \varphi$.

对任意 $\varphi \in T^f$，都有 $\varnothing \Vdash^* \varphi$. 由 $\varnothing \subset G$. 由已证的结果有 $\mathscr{U} \models \varphi$. 因此 $\mathscr{U} \models T^f$. ▌

命题 12.2.7 说明改用弱力迫定义的兼纳模型将和用力迫定义的没有区别，兼纳模型还给出了弱力迫的语义性质。

命题 12.2.8 设 $\mathscr{L}$ 可数，$p \Vdash^* \varphi$ 当且仅当对任意包含 p 的兼纳集 G 生成的兼纳模型 $\mathscr{U}$，$\mathscr{U} \models \varphi$.

证明 设 $p \Vdash^* \varphi$，由命题 12.2.7 已知 $\mathscr{U} \models \varphi$. 设 $p \not\Vdash^* \varphi$，则存在条件 $q \supset p$. $q \Vdash \neg\varphi$. 由定理 12.2.5 有兼纳集 G. $p \subset q \subset G$，G 生成的兼纳模型 $\mathscr{U}$，$\mathscr{U} \models \neg\varphi$. ▌

推论 12.2.9 设 $\mathscr{L}$ 可数，T 是 $\mathscr{L}$ 的和谐理论，则
$T^f = \{\varphi \in \mathscr{L} : \mathscr{U}$ 是 T 的兼纳模型，$\mathscr{U} \models \varphi\}$.

证明 设 φ 是 $\mathscr{L}$ 的任何一个句子，$\varphi \in T^f$ 当且仅当 $\varnothing \Vdash^* \varphi$，由命题 12.2.8 当且仅当对任意兼纳模型 $\mathscr{U}$，$\mathscr{U} \models \varphi$. ▌

弱力迫的这个语义性质只对可数语言 $\mathscr{L}$ 成立，因为当 $\mathscr{L}$ 不可数时，和谐理论 T 不一定有兼纳模型。

下面我们来介绍兼纳模型的一些性质。

命题 12.2.10 设 $\mathscr{U}$ 是 T 的兼纳模型，则 $\mathscr{U}$ 可以扩充为 T

的模型，即存在 $\mathscr{B}\supset\mathscr{U}$，$\mathscr{B}\models T$.

证明 设 $\mathscr{U}$ 是 T 的兼纳模型，由命题 12.2.7 有 $\mathscr{U}\models T^f$，设 φ 是 $\mathscr{L}$ 的全称句子，即 $\varphi\in\Pi_1$，如果 $T\vdash\varphi$，由命题 12.1.7 有 $\varnothing\Vdash^*\varphi$. 所以有 $\varphi\in T^f$. 这样 $T_\forall\subset T^f$. 因此 $\mathscr{U}\models T_\forall$. 由命题 4.3.4 存在 $\mathscr{B}\supset\mathscr{U}$. $\mathscr{B}\models T$. ▌

为了更方便地应用兼纳模型，我们把 $\mathscr{L}$ 中模型 $\mathscr{U}$，$\mathscr{U}$ 是 T 的兼纳模型，看成是由 $\mathscr{U}$ 自身的图象 $\Delta_{\mathscr{U}}$ 生成的。

命题 12.2.11 设 $\mathscr{U}$ 是 T 的兼纳模型，则 $\Delta_{\mathscr{U}}$ 是 T 在 $\mathscr{L}(A)$ 中的兼纳集，$\mathscr{U}$ 是由 $\Delta_{\mathscr{U}}$ 生成的兼纳模型。

证明 设 $\mathscr{U}$ 是由 T 在 $\mathscr{L}(C)$ 中的兼纳集 G 生成的. 由于 A 的每个元素都是 C 中常量的解释，我们把 $c\in C$，c 的解释 $c^{\mathscr{U}}\in A$ 看成是 c 自身，即把 $c^{\mathscr{U}}$ 看成 c，就有 $A\subset C$. 由命题 12.2.10 $\mathscr{U}$ 可以扩充为 T 的模型，因此 $\Delta_{\mathscr{U}}$ 中每个有限子集都在 T 的模型中成立，所以是 T 的条件。

设 φ 是 $\mathscr{L}(A)$ 中任一句子，如果 $\mathscr{U}\models\varphi$，则有 $G\Vdash\varphi$，因而有 $p\subset G$，$p\Vdash\varphi$，但 p 中任意一个句子都被 p 力迫，因此 $\mathscr{U}\models p$. 从而有 $p'\subset\Delta_{\mathscr{U}}$. 这里 p' 是把 p 中出现 C 常量符号用 A 中相应的解释作代换得到的句子集. 注意 p 中不同的常量可能被换成 A 中相同的元素。我们要证明 $p\underset{\mathscr{L}(c)}{\Vdash}\varphi$ 当且仅当 $p'\underset{\mathscr{L}(A)}{\Vdash}\varphi$.

对 φ 是原子句，$\psi_1\vee\psi_2$，$\exists x\psi(x)$ 的情形都容易证明. 设 $\varphi=\neg\psi$，如果 $p'\underset{\mathscr{L}(A)}{\Vdash}\neg\psi$，由命题 12.1.2 也有 $p\underset{\mathscr{L}(C)}{\Vdash}\neg\psi$. 现设 $p\underset{\mathscr{L}(C)}{\Vdash}\neg\psi$. 如果 $p'\underset{\mathscr{L}(A)}{\nVdash}\neg\psi$，则存在 $q'\supset p'$. $q'\underset{\mathscr{L}(A)}{\Vdash}\psi$. 而 q' 当然也是 $\mathscr{L}(C)$ 中 T 的条件，作适当的变换后有 $q\supset p$，由归纳假设 $q\underset{\mathscr{L}(C)}{\Vdash}\psi$ 与 $p\underset{\mathscr{L}(C)}{\Vdash}\neg\psi$ 矛盾！

这样对 $\mathscr{L}$ 中任意句子 φ，$\mathscr{U}\models\varphi$ 就有 $p\subset\Delta_{\mathscr{U}}$，$p\Vdash\varphi$，易见 $\Delta_{\mathscr{U}}$ 是 $\mathscr{L}(A)$ 的兼纳集，而且有

$\mathscr{U}\models\varphi$ 当且仅当 $\Delta_{\mathscr{U}}\Vdash\varphi$

这样 $\mathscr{U}$ 是 $\Delta_{\mathscr{U}}$ 生成的兼纳模型。 ▌

命题 12.2.12 设 $\mathscr{U}_1, \mathscr{U}_2$ 都是 T 的兼纳模型，$\mathscr{U}_1 \subset \mathscr{U}_2$. 则 $\mathscr{U}_1 \prec \mathscr{U}_2$.

证明 任取公式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n) \in \mathscr{L}$，任意 $a_1, \cdots, a_n \in A$. 如果 $\mathscr{U}_1 \models \varphi[a_1, \cdots, a_n]$，由 $\mathscr{U}_1$ 是兼纳模型，$\Delta_{\mathscr{U}_1}$ 是兼纳集有 $\Delta_{\mathscr{U}} \Vdash \varphi(a_1, \cdots, a_n)$. 由 $\mathscr{U}_1 \subset \mathscr{U}_2$ 有 $\Delta_{\mathscr{U}_1} \subset \Delta_{\mathscr{U}_2}$，因此 $\Delta_{\mathscr{U}_2} \Vdash \varphi(a_1, \cdots, a_n)$. 再由 $\mathscr{U}_2$ 也是兼纳模型，

$\mathscr{U}_2 \models \varphi[a_1, \cdots, a_n]$。 ▌

定理 12.2.13 设 $\mathscr{U}$ 是 T 的兼纳模型，则 $\mathscr{U}$ 是 T 的**存在完备模型**。即 $\mathscr{L}(A)$ 中任何 Σ_1 句子如在 $\mathscr{U}_A$ 的 T 扩充中真，就在 $\mathscr{U}_A$ 中真。

证明 设 $\mathscr{U}_1 \models T$，$\mathscr{U} \subset \mathscr{U}_1$，$\varphi$ 是 $\mathscr{L}(A)$ 的一个存在句. $\mathscr{U}_{1A} \models \varphi$，我们证明必有 $\mathscr{U}_A \models \varphi$. 由命题 12.1.6 知存在有限子集 $p \subset \Delta_{\mathscr{U}_1}$，使 $p \Vdash \varphi$. 设 $\mathscr{U}_A \not\models \varphi$，则 $\mathscr{U}_A \models \neg\varphi$，由 $\mathscr{U}$ 是兼纳模型，有条件 $q \subset \Delta_{\mathscr{U}}$，使 $q \Vdash \neg\varphi$，但由 $\mathscr{U} \subset \mathscr{U}_1$，有 $p \cup q \subset \Delta_{\mathscr{U}_1}$，因此，$p \cup q$ 也是 T 的条件，这时，$p \cup q \Vdash \varphi$ 且 $p \cup q \Vdash \neg\varphi$ 得到矛盾。因此 $\mathscr{U}_A \models \varphi$. ▌

定理 12.2.14 设 $\mathscr{B}$ 是 T 的兼纳模型，$\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{L}$ 的模型，$\mathscr{U} \prec_1 \mathscr{B}$，则 $\mathscr{U}$ 也是 T 的兼纳模型。

证明 先证 $\Delta_{\mathscr{U}}$ 是 T 在 $\mathscr{L}(A)$ 中的兼纳集，由 $\mathscr{B}$ 是 T 的兼纳模型知 $\mathscr{B} \models T_\forall$，又由 $\mathscr{U} \prec_1 \mathscr{B}$ 知 $\mathscr{U} \models T_\forall$. 因此 $\Delta_{\mathscr{U}}$ 的任意有限子集都与 T 和谐，是 T 的条件。

设 φ 是 $\mathscr{L}(A)$ 中任一句子，我们证明

$\Delta_{\mathscr{U}} \Vdash \varphi$ 当且仅当 $\Delta_{\mathscr{B}} \Vdash \varphi$.

如果 $\Delta_{\mathscr{U}} \Vdash \varphi$，即有 $p \subset \Delta_{\mathscr{U}}$，$p \Vdash \varphi$，由 $\mathscr{U} \prec_1 \mathscr{B}$，有 $\Delta_{\mathscr{U}} \subset \Delta_{\mathscr{B}}$，因此 $p \subset \Delta_{\mathscr{B}}$，自然有 $\Delta_{\mathscr{B}} \Vdash \varphi$。反之，如果 $\Delta_{\mathscr{B}} \Vdash \varphi$，则有 $q \subset \Delta_{\mathscr{B}}$，$q \Vdash \varphi$。设 q 中出现的不属于 A 的新常量为 $b_1, \cdots, b_n \in B$，则

$\mathscr{B}\models\wedge q\ (b_1,\ \cdots,\ b_n)$，这样$\mathscr{B}\models\exists(x_1,\cdots,\ x_n)\wedge q(x_1,\ \cdots,\ x_n)$. 这里$\wedge q$表示$q$中全体句子的合取式，易见$\wedge q$无量词。由$\mathscr{U}\prec_1\mathscr{B}$，可得$\mathscr{U}\models\exists x_1\cdots x_n\wedge q(x_1,\ \cdots,\ x_n)$，因此有$a_1,\ \cdots,\ a_n\in A$，使$\mathscr{U}\models\wedge q(a_1,\ \cdots,\ a_n)$。这样$q(a_1,\ \cdots,\ a_n)\subset\Delta_{\mathscr{U}}$. 由命题12.1.2的证明可知有$q(a_1,\ \cdots,\ a_n)\Vdash\varphi$，从而得到$\Delta_{\mathscr{U}}\Vdash\varphi$.

现在，对任意句子$\varphi\in\mathscr{L}(A)$，由$\Delta_{\mathscr{B}}$是T的兼纳集，有$\Delta_{\mathscr{B}}\Vdash\varphi$或$\Delta_{\mathscr{B}}\Vdash\neg\varphi$必有$\Delta_{\mathscr{U}}\Vdash\varphi$或$\Delta_{\mathscr{U}}\Vdash\neg\varphi$，因此$\Delta_{\mathscr{U}}$也是$T$的兼纳集。

最后对φ的复杂性归纳证明$\Delta_{\mathscr{U}}\Vdash\varphi$当且仅当$\mathscr{U}\models\varphi$. 当$\varphi$是原子句，$\varphi=\psi_1\wedge\psi_2$，$\varphi=\exists x\psi(x)$时都是显然的. 当$\varphi=\neg\psi$时，如果$\Delta_{\mathscr{U}}\Vdash\neg\psi$. 则$\Delta_{\mathscr{U}}\nVdash\psi$，由归纳假设$\mathscr{U}\nvDash\psi$，则$\mathscr{U}\models\neg\psi$. 如果$\Delta_{\mathscr{U}}\nVdash\neg\psi$，则必有$\Delta_{\mathscr{U}}\Vdash\psi$. 由归纳假设有$\mathscr{U}\models\psi$. 因此$\mathscr{U}\nvDash\neg\psi$.

这样$\mathscr{U}$是由$\Delta_{\mathscr{U}}$生成的兼纳模型。 ▌

定理 12.2.15. 设$\mathscr{U}_1\subset\mathscr{U}_2\subset\cdots\subset\mathscr{U}_n\subset\cdots$，$n<\omega$是$T$的兼纳模型链，即对任意$n<\omega$，$\mathscr{U}_n$是$T$的兼纳模型，则$\bigcup\limits_{n<\omega}\mathscr{U}_n$也是$T$的兼纳模型。

证明 令$\mathscr{U}=\bigcup\limits_{n<\omega}\mathscr{U}_n$，则$\Delta_{\mathscr{U}}=\bigcup\limits_{n<\omega}\Delta_{\mathscr{U}_n}$易见$\Delta_{\mathscr{U}}$的任一有限子集是某个$\bigcup\Delta_{\mathscr{U}_n}$的有限子集，因此与$T$和谐. 对$\mathscr{L}(A)$中任一句子$\varphi$，$\varphi$中新常量只有有限多个，因此必存在$n<\omega$，使$\varphi$是$\mathscr{L}(A_n)$中一句子，这样由$\mathscr{U}_n$是兼纳模型有$\Delta_{\mathscr{U}_n}\Vdash\psi$或$\Delta_{\mathscr{U}_n}\Vdash\neg\psi$，于是$\Delta_{\mathscr{U}}\Vdash\psi$或$\Delta_{\mathscr{U}}\Vdash\neg\psi$. 因此$\Delta_{\mathscr{U}}$是$T$在$\mathscr{L}(A)$中的兼纳集. 又由定理12.2.12知兼纳模型的链必是初等链，对任$\varphi\in\mathscr{L}(A)$，存在$n<\omega,\varphi\in\mathscr{L}(A_n)$.

$\mathscr{U}\models\varphi$当且仅当$\mathscr{U}_n\models\varphi$当且仅当$\Delta_{\mathscr{U}_n}\Vdash\varphi$当且仅当$\Delta_{\mathscr{U}}\Vdash\varphi$.

因此$\mathscr{U}$是$\Delta_{\mathscr{U}}$生成的兼纳模型。 ▌

到现在为止我们并没有对和谐理论T附加任何条件，T的兼纳模型一般也不是T的模型. 如果我们对T加以适当限制，可以

使兼纳模型有更好的性质.

命题 12.2.16 设 T 是**归纳理论**，即 T 保持模型链的并，则 T 的兼纳模型是 T 的模型。

证明 T 是归纳理论，由保持性定理知 T 有 Π_2 公理集. 设 $\mathscr{U}$ 是 T 的一个兼纳模型，要证 $\mathscr{U}\models T$. 只需对任何一个 Π_2 句子 φ，证明如果 $T\vdash\varphi$ 就有 $\mathscr{U}\models\varphi$.
令 $\varphi=\forall x_1\cdots x_n\exists y_1\cdots y_m\psi(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)$，$\psi$ 无量词，设 $T\vdash\varphi$，但 $\mathscr{U}\not\models\varphi$，则 $\mathscr{U}\models\neg\varphi$，于是存在 $a_1,\cdots,a_n\in A$，使 $\mathscr{U}\models\neg\exists y_1\cdots y_m\psi[a_1,\cdots,a_n]$. 由 $\mathscr{U}$ 是兼纳模型知有条件 $p\subset\Delta_{\mathscr{U}}$，$p\Vdash\neg\exists y_1\cdots y_m\psi(a_1,\cdots,a_n,y_1,\cdots,y_m)$.

另一方面，由命题 12.2.10 $\mathscr{U}$ 可以扩充为 T 的模型，即存在模型 $\mathscr{B}\supset\mathscr{U}$. $\mathscr{B}\models T$. 这就有 $\mathscr{B}\models\varphi$. 由于 $a_1,\cdots,a_n\in A\subset B$. $\mathscr{B}\models\exists y_1\cdots y_m\psi[a_1,\cdots,a_n]$，$\psi$ 无量词，由命题 12.1.6 知有条件 $q\subset\Delta_{\mathscr{B}}$，使 $q\Vdash\exists y_1\cdots y_m\psi(a_1,\cdots,a_n,y_1,\cdots,y_m)$，再由 $\mathscr{U}\subset\mathscr{B}$，$\Delta_{\mathscr{U}}\subset\Delta_{\mathscr{B}}$ 有 $p\subset\Delta_{\mathscr{B}}$，因此 $p\cup q\subset\Delta_{\mathscr{B}}$ 仍是 T 的条件，这样 $p\cup q\Vdash\neg\exists y_1\cdots y_m\psi(a_1,\cdots,a_n,y_1,\cdots,y_m)$，又有 $p\cup q\Vdash\exists y_1\cdots y_m\psi(a_1,\cdots,a_n,y_1,\cdots,y_m)$，而这是不可能的. 因此我们有 $\mathscr{U}\models\varphi$，从而 $\mathscr{U}\models T$. ▌

进一步讨论我们还可以看到归纳理论 T 的存在闭模型都是 T 的兼纳模型，这样对归纳理论 T，兼纳模型与存在闭模型是一致的.

最后我们用有限力迫方法来证明省略型定理的一种形式。

定理 12.2.17 设 $\Sigma(x)$ 是可数语言 $\mathscr{L}$ 的存在公式集，T 是 $\mathscr{L}$ 的一个归纳理论，C 是可数无限新常量集，对 T 在 $\mathscr{L}(C)$ 中的每个条件 p，每个 $c\in C$，如果都有存在公式 $\sigma(x)\in\Sigma(x)$，使 $T\cup p\cup\{\sigma(x)\}$ 和谐，则必有模型 $\mathscr{U}\models T$，$\mathscr{U}$ 的论域中任意一个元素 $a\in A$，都有 $\sigma(x)\in\Sigma(x)$ 使 $\mathscr{U}\models\sigma[a]$.

证明 先证明对任何条件 p，任何存在公式 $\sigma(x)$，任何 $c\in C$，

如果 $T\cup p\cup\{\sigma(c)\}$ 和谐，则存在条件 $q\supset p$. $q\Vdash\sigma(c)$.

由 $T\cup p\cup\{\sigma(c)\}$ 和谐，知有 $\mathscr{L}(C)$ 的模型 $\mathscr{U}\models T$，$\mathscr{U}\models p$，$\mathscr{U}\models\sigma(c)$. 由命 12.1.6 存在 $r\subset\Delta_{\mathscr{U}}$ 使 $r\Vdash\sigma(c)$，但 $p\cup r\subset\Delta_{\mathscr{U}}$ 仍是 T 的条件. 令 $q=p\cup r$，有 $q\supset p$，$q\Vdash\sigma(c)$.

现在列出 C 的全体常量 $c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots, n<\omega$. 列出 $\mathscr{L}(C)$ 的全体句子：

$\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n, \cdots, n<\omega$.

构造 T 在 $\mathscr{L}(C)$ 中的条件的递增序列

$p=p_0\subset p_1\subset\cdots\subset p_n\subset\cdots,\ n<\omega$.

使对每个 $n<\omega$，$p_{n+1}\Vdash\varphi_n$ 或 $p_{n+1}\Vdash\neg\varphi_n$，并且存在 $\sigma(x)\in\Sigma(x)$，$p_{n+1}\Vdash\sigma(c_n)$.

设 p_n 已构造好，这时由题设有 $\sigma(x)\in\Sigma(x)$，使 $T\cup p_n\cup\{\sigma(c_n)\}$ 和谐. 这样就有条件 q，$q\supset p_n$，$q\Vdash\sigma(c_n)$，如果 $q\Vdash\neg\varphi_n$，就令 $p_{n+1}=q$，如果 $q\nVdash\neg\varphi_n$，则存在 $r\supset q$，$r\Vdash\varphi_n$，就令 $p_{n+1}=r$. 这样 $p_{n+1}\Vdash\sigma(c_n)$，且 $p_{n+1}\Vdash\varphi_n$ 或 $p_{n+1}\Vdash\neg\varphi_n$.

令 $G=\bigcup_{n<\omega}p_n$，易见 G 是 T 在 $\mathscr{L}(C)$ 中的兼纳集，由 G 生成 T 的兼纳模型 $\mathscr{U}$，由命题 12.2.16，$\mathscr{U}\models T$，对每个 $a\in A$，a 是某 $c_n\in C$ 的解释，这时有 $\sigma(x)\in\Sigma(x)$，使 $p_{n+1}\Vdash\sigma(c_n)$，因此 $G\Vdash\sigma(c_n)$，从而 $\mathscr{U}\models\sigma(c_n)$、即 $\mathscr{U}\models\sigma(a)$. ▌

与原来的省略型定理一样，可以把上述定理推广到可数无限多个存在公式的集合，我们把它留给读者去证明。

练习

12.2.1 设 $\mathscr{U}$ 是 T 的存在完备模型，$\mathscr{U}$ 又是 T 的模型，则称 $\mathscr{U}$ 是 T 的存在闭模型，设 T 是归纳理论，则 T 的每个兼纳模型都是 T 的存在闭模型。

12.2.2 如果已知归纳理论 T 的存在闭模型都互相初等等价，证明 T 的存在闭模型都是 T 的兼纳模型。

12.2.3 设$\mathscr{U}$是T的兼纳模型，$\mathscr{B}\prec\mathscr{U}$，证明$\mathscr{B}$也是$T$的兼纳模型。

12.2.4 设$\Sigma_1(x),\Sigma_2(x),\cdots$是可数语言$\mathscr{L}$的可数多个存在公式的集合，$T$是$\mathscr{L}$的归纳理论，$C$是可数无限新常量集，对$T$在$\mathscr{L}(C)$中的每个条件$p$，每个$c\in C$，每个$m<\omega$，都有$\sigma(x)\in\Sigma_m(x)$. 使$T\cup p\cup\{\sigma(c)\}$和谐，则存在一个模型$\mathscr{U}\models T$，对每个$a\in A$，每个$m<\omega$，都有$\sigma(x)\in\Sigma_m(x)$. 使$\mathscr{U}\models\sigma[a]$.

§12.3 无限力迫法

语言$\mathscr{L}$的一个模型类Σ称为**归纳类**，如果Σ中模型构成的模型链的并仍是Σ中一个模型。设Σ是给定语言$\mathscr{L}$的模型的归纳类，我们在Σ中定义模型和句子的无限力迫关系。设$\mathscr{U}$是Σ中一个模型，φ是$\mathscr{L}(A)$中一个句子，这里A是模型$\mathscr{U}$的论域，$\mathscr{L}(A)$是$\mathscr{L}$的膨胀语言，递归地定义$\mathscr{U}$ **无限力迫** φ，记作$\mathscr{U}\Vdash\varphi$。

(i) 如果φ是原子句，则$\mathscr{U}\Vdash\varphi$当且仅当$\mathscr{U}_A\models\varphi$;

(ii) 如果$\varphi=\psi_1\vee\psi_2$，则$\mathscr{U}\Vdash\varphi$当且仅当$\mathscr{U}\Vdash\psi_1$或$\mathscr{U}\Vdash\psi_2$;

(iii) 如果$\varphi=\exists x\psi(x)$，则$\mathscr{U}\Vdash\varphi$当且仅当存在某元素$a\in A$，使$\mathscr{U}\Vdash\psi(a)$;

(iv) 如果$\varphi=\neg\psi$，则$\mathscr{U}\Vdash\varphi$当且仅当Σ中不存在$\mathscr{U}$的扩充模型$\mathscr{U}_1$，使$\mathscr{U}_1\Vdash\psi$.

由这个定义，对任意一个模型$\mathscr{U}\in\Sigma$，任意句子$\varphi\in\mathscr{L}(A)$，都不能$\mathscr{U}\Vdash\varphi$和$\mathscr{U}\Vdash\neg\varphi$同时成立。如果$\varphi=\forall x\psi(x)$，我们由$\forall x\psi(x)=\neg\exists x\neg\psi(x)$可知，$\mathscr{U}\Vdash\varphi$当且仅当对任意$a\in A$，存在模型$\mathscr{U}_1\in\Sigma$，使$\mathscr{U}\subset\mathscr{U}_1$，$\mathscr{U}_1\Vdash\psi(a)$.

命题 12.3.1 设$\mathscr{U}_1$，$\mathscr{U}_2\in\Sigma$，$\varphi\in\mathscr{L}(A_1)$，$\mathscr{U}_1\subset\mathscr{U}_2$，如果$\mathscr{U}_1\Vdash\varphi$，则$\mathscr{U}_2\Vdash\varphi$.

证明 对句子φ的复杂性归纳容易证明。 ▌

设$\mathscr{U}$是归纳类Σ中一个模型，$\mathscr{U}$称为是Σ的**无限兼纳模型**，如果对$\mathscr{L}(A)$中任意句子φ都有$\mathscr{U}\Vdash\varphi$或$\mathscr{U}\Vdash\neg\varphi$.

命题 12.3.2 归纳类Σ中每个模型都可以扩充成为Σ的无限兼纳模型。

证明 设$\mathscr{U}\in\Sigma$，列出$\mathscr{L}(A)$中全部句子：

$\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_\beta, \cdots, \beta<\alpha$

其中$\alpha=\|\mathscr{L}(A)\|$，我们构造$\Sigma$中模型的一个链：

$\mathscr{U}=\mathscr{U}_0\subset\mathscr{U}_1\subset\cdots\subset\mathscr{U}_\beta\subset\cdots,\ \beta<\alpha.$

对任意后继序数$\beta+1$，如果$\mathscr{U}_\beta\Vdash\varphi_\beta$或$\mathscr{U}_\beta\Vdash\neg\varphi_\beta$，则令$\mathscr{U}_{\beta+1}=\mathscr{U}_\beta$，如果$\mathscr{U}_\beta\not\Vdash\neg\varphi_\beta$，则可以取到一个模型$\mathscr{U}'\in\Sigma$，使$\mathscr{U}_\beta\subset\mathscr{U}'$，$\mathscr{U}'\Vdash\varphi_\beta$，令$\mathscr{U}_{\beta+1}=\mathscr{U}'$，如果$\gamma(\gamma<\alpha)$是极限序数，则令$\mathscr{U}_\gamma=\bigcup_{\beta<\gamma}\mathscr{U}_\beta$.

令$\mathscr{U}^1=\bigcup_{\beta<\alpha}\mathscr{U}_\beta$，由$\Sigma$是归纳类知$\mathscr{U}^1\in\Sigma$，由命题 12.3.1 知对$\mathscr{L}(A)$中任意句子$\varphi$，$\mathscr{U}^1\Vdash\varphi$或$\mathscr{U}^1\Vdash\neg\varphi$. 重复这一构造可以得到一个链：

$\mathscr{U}=\mathscr{U}_0\subset\mathscr{U}^1\subset\mathscr{U}^2\subset\cdots\subset\mathscr{U}^n\subset\cdots,\ n<\omega$

使对任意$n<\omega$，$\mathscr{U}^n\in\Sigma$，对任意$\varphi\in\mathscr{L}(A_n)$，$\mathscr{U}^{n+1}\Vdash\varphi$或$\mathscr{U}^{n+1}\Vdash\neg\varphi$，现在令$\mathscr{U}^\omega=\bigcup_{n<\omega}\mathscr{U}^n$，则$\mathscr{U}^\omega\in\Sigma$，$\mathscr{U}\subset\mathscr{U}^\omega$，对$\mathscr{L}(A^\omega)$中任意句子$\varphi$，由于$\varphi$中新常量最多有限多个，因此存在$n<\omega$，使$\varphi\in\mathscr{L}(A^n)$，这样$\mathscr{U}^{n+1}\Vdash\varphi$或$\mathscr{U}^{n+1}\Vdash\neg\varphi$，因此有$\mathscr{U}^\omega\Vdash\varphi$或$\mathscr{U}^\omega\Vdash\neg\varphi$，于是$\mathscr{U}^\omega$是$\Sigma$的无限兼纳模型。 ▌

定理 12.3.3 $\mathscr{U}$是归纳类Σ中无限兼纳模型当且仅当对$\mathscr{L}(A)$中任意句子φ，$\mathscr{U}_A\models\varphi$当且仅当$\mathscr{U}\Vdash\varphi$.

证明 设$\mathscr{U}\in\Sigma$，对$\mathscr{L}(A)$中任意句子φ都有$\mathscr{U}_A\models\varphi$当且仅当$\mathscr{U}\Vdash\varphi$，则对$\mathscr{L}(A)$中任意句子$\varphi$，必有$\mathscr{U}\Vdash\varphi$或$\mathscr{U}\Vdash\neg\varphi$成立，因此$\mathscr{U}$是无限兼纳模型。

现在设 $\mathscr{U}\in\Sigma$，$\mathscr{U}$ 是 Σ 的无限兼纳模型，对 φ 的复杂性归纳证明：$\mathscr{U}_A\models\varphi$ 当且仅当 $\mathscr{U}\Vdash\varphi$。对 φ 是原子句子，$\varphi=\psi_1\vee\psi_2$，$\varphi=\exists x\psi(x)$ 的情形容易证明，现在设 $\varphi=\neg\psi$，如果 $\mathscr{U}_A\models\varphi$，则 $\mathscr{U}_A\not\models\psi$. 由归纳假设 $\mathscr{U}\not\Vdash\psi$，由 $\mathscr{U}$ 是无限兼纳模型知必有 $\mathscr{U}\Vdash\neg\psi$ 即 $\mathscr{U}\Vdash\varphi$。如果 $\mathscr{U}_A\not\models\varphi$，则 $\mathscr{U}_A\models\psi$，由归纳假设 $\mathscr{U}\Vdash\psi$，因此 $\mathscr{U}\not\Vdash\neg\psi$ 即 $\mathscr{U}\not\Vdash\varphi$。完成归纳。 ▌

由定理 12.3.3 无限兼纳模型满足一个句子和力迫一个句子是一致的，这和有限力迫的情形完全相同，因此我们有类似的性质。

命题 12.3.4 设 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}\in\Sigma$ 都是 Σ 的无限兼纳模型，如果 $\mathscr{U}\subset\mathscr{B}$，则 $\mathscr{U}\prec\mathscr{B}$.

证明 设 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 是 $\mathscr{L}$ 的一个公式，$a_1,\cdots,a_n\in A$，如果 $\mathscr{U}\models\varphi[a_1,\cdots,a_n]$，则 $\mathscr{U}\Vdash\varphi(a_1,\cdots,a_n)$，由命题 12.3.1 $\mathscr{B}\Vdash\varphi(a_1,\cdots,a_n)$，由 $\mathscr{B}$ 也是无限兼纳模型，$\mathscr{B}\models\varphi[a_1,\cdots,a_n]$，因此 $\mathscr{U}\prec\mathscr{B}$. ▌

设 Σ 是一个模型类，$\mathscr{U}\in\Sigma$，称 $\mathscr{U}$ 为 Σ **的存在完备模型**，如果对 $\mathscr{L}(A)$ 中任意存在句子 φ，对 $\mathscr{U}$ 在 Σ 中任意一个扩充模型 $\mathscr{B}$，如果 $\mathscr{B}_A\models\varphi$ 则 $\mathscr{U}_A\models\varphi$.

命题 12.3.5 设 Σ 是一个归纳类，则 Σ 中每个无限兼纳模型都是 Σ 存在完备模型。

证明 设 $\mathscr{U}\in\Sigma$，$\mathscr{U}$ 是无限兼纳模型，设 $\varphi\in\mathscr{L}(A)$ 是存在句，$\mathscr{B}\in\Sigma$，$\mathscr{U}\subset\mathscr{B}$，设 $\mathscr{B}_A\models\varphi$，由命题 12.3.2 $\mathscr{B}$ 可以扩充为 Σ 的无限兼纳模型 $\mathscr{C}$，由 φ 是存在句在扩充模型下保持 $\mathscr{C}_A\models\varphi$，由 $\mathscr{U}\subset\mathscr{B}\subset\mathscr{C}$ 且 $\mathscr{U}$，$\mathscr{C}$ 都是无限兼纳模型，由命题 12.3.4，$\mathscr{U}\prec\mathscr{C}$，从而 $\mathscr{U}_A\models\varphi$. ▌

以 G 记归纳类 Σ 中全体无限兼纳模型构成的模型类。

命题 12.3.6 Σ 的无限兼纳模型类 G 也是一个归纳类。

证明 $\mathscr{U}_\beta$，$\beta<\alpha$，是 Σ 的无限兼纳模型链，令 $\mathscr{U}=\bigcup_{\beta<\alpha}\mathscr{U}_\beta$，

由 Σ 是归纳类知 $\mathscr{U}\in\Sigma$。设 φ 是 $\mathscr{L}(A)$ 中任一句子，由 φ 中常量最多有限知存在 $\beta<\alpha$，使 $\varphi\in\mathscr{L}(A_\beta)$，由 $\mathscr{U}_\beta$ 是无限兼纳模型知 $\mathscr{U}_\beta\Vdash\varphi$ 或 $\mathscr{U}_\beta\Vdash\neg\varphi$ 有一个成立，由于 $\mathscr{U}_\beta\subset\mathscr{U}$，则 $\mathscr{U}\Vdash\varphi$ 或 $\mathscr{U}\Vdash\neg\varphi$ 必有一个成立，这样 $\mathscr{U}$ 也是 Σ 的无限兼纳模型. ▌

定理 12.3.7 设 Σ 是一个归纳类，则 Σ 的无限兼纳模型类 G 恰是 Σ 的唯一的满足下列条件一个子类 H：

(1) Σ 中每个模型都可以扩充成为 H 中某个模型；

(2) H 中任意两个模型 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$，若 $\mathscr{U}\subset\mathscr{B}$ 则 $\mathscr{U}\prec\mathscr{B}$；

(3) H 包含 Σ 中任意满足 (1)，(2) 的子类。

证明 由命题 12.3.2 及 12.3.4 知 G 满足条件 (1)，(2)。现在证明 G 满足 (3)，设 J 是 Σ 的一个子类，满足 (1)、(2)，要证明 $J\subset G$。任取 $\mathscr{U}\in J$，我们证明 $\mathscr{U}$ 是 Σ 的无限兼纳模型，对 $\mathscr{L}(A)$的句子 φ 的复杂度归纳证明 $\mathscr{U}\models\varphi$ 当且仅当 $\mathscr{U}\Vdash\varphi$。对 φ 是原子句，$\varphi=\psi_1\wedge\psi_2$，$\varphi=\psi\vee\psi_2$，$\varphi=\exists x\psi(x)$ 的情形都容易归纳证明，现在设 $\varphi=\neg\psi$。如果 $\mathscr{U}\Vdash\neg\psi$，则 $\mathscr{U}\nVdash\psi$，由归纳假设有 $\mathscr{U}\nvDash\psi$,则 $\mathscr{U}\models\neg\psi$。反之如果 $\mathscr{U}\nVdash\neg\psi$，则存在 $\mathscr{U}'\in\Sigma$，使 $\mathscr{U}\subset\mathscr{U}'$，$\mathscr{U}'\Vdash\psi$，由命题 12.3.2 存在 Σ 的无限兼纳模型 $\mathscr{B}_1\in G$，使 $\mathscr{U}'\subset\mathscr{B}_1$，由命题 12.3.2 有 $\mathscr{B}_1\Vdash\psi$，因此有 $\mathscr{B}_1\models\psi$，由 J 满足性质 (1)，存在模型 $\mathscr{U}_2\in J$，使 $\mathscr{B}_1\subset\mathscr{U}_2$，重复这一过程可得到 Σ 的模型链

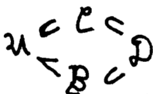
$\mathscr{U}=\mathscr{U}_1\subset\mathscr{B}_1\subset\mathscr{U}_2\subset\mathscr{B}_2\subset\cdots\subset\mathscr{U}_n\subset\mathscr{B}_n\subset\cdots$，$n<\omega$，对任意 $n<\omega$，$\mathscr{B}_n\in G$，$\mathscr{U}_n\in J$，$\mathscr{B}_n\models\psi$。令 $\mathscr{U}_\omega=\bigcup\limits_{n<\omega}\mathscr{U}_n$，则 $\mathscr{U}_\omega=\bigcup\limits_{n<\omega}\mathscr{B}_n$。由于 G 与 J 都满足性质 (2)，因此模型链 $\mathscr{U}_n$，$n<\omega$ 及 $\mathscr{B}_n$，$n<\omega$ 都是初等链，从而 $\mathscr{U}_\omega\models\psi$ 由 $\mathscr{U}=\mathscr{U}_1\prec\mathscr{U}_\omega$，有 $\mathscr{U}_1\models\psi$。这样由 $\mathscr{U}\nVdash\neg\psi$ 得到 $\mathscr{U}\models\psi$，即由 $\mathscr{U}\models\neg\psi$ 必有 $\mathscr{U}\Vdash\neg\psi$，完成归纳。因此 $\mathscr{U}$ 是无限兼纳模型，$\mathscr{U}\in G$，即得到 $J\subset G$。因此 G 满足 (3)。 ▌

定理 12.3.7 说明归纳类 Σ 的无限兼纳模型子类 G 可由性质

(1)、(2)、(3) 完全确定，这样无限兼纳模型可以由纯粹模型论的性质 (1)、(2)、(3) 定义而不必由无限力迫定义得到。如果 Σ 是某个归纳理论 T 的模型类，则 Σ 的无限兼纳模型类还有如下性质：

命题 12.3.8 设 T 是 $\mathscr{L}$ 的归纳理论，$\Sigma=\Sigma_T$ 是 T 的模型组成的模型类，如果 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}\in\Sigma$，$\mathscr{U}\prec\mathscr{B}$，$\mathscr{B}$ 是 Σ 的无限兼纳模型，则 $\mathscr{U}$ 也是 Σ 的无限兼纳模型。

证明 对 $\mathscr{L}(A)$ 中句子 φ 的复杂性证明 $\mathscr{U}\models\varphi$ 当且仅当 $\mathscr{U}\Vdash\varphi$。只需证明 $\varphi=\neg\psi$ 的情况，设 $\mathscr{U}\Vdash\neg\psi$，则 $\mathscr{U}\nVdash\psi$，由归纳假设 $\mathscr{U}\nvDash\psi$，因此 $\mathscr{U}\models\neg\psi$。反之如果 $\mathscr{U}\nVdash\neg\psi$，则存在模型 $\mathscr{C}\in\Sigma$，使 $\mathscr{U}\subset\mathscr{C}$，$\mathscr{C}\Vdash\psi$，我们证明必存在模型 $\mathscr{D}\in\Sigma$，使



令 $\mathscr{L}'=\mathscr{L}(A)\cup B\backslash A\cup C\backslash A$，我们证明 $T\cup\Delta_{\mathscr{C}}\cup\Delta_{\mathscr{B}}$ 和谐. 任取 $\Delta_{\mathscr{B}}$ 中有限子集 φ_1，…，φ_r，设其中新常量都在 a_1，…，$a_n\in A$，b_1，…，$b_m\in B\backslash A$ 中，则

$\mathscr{B}\models\varphi_1(a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_m)\wedge\cdots\wedge\varphi_r(a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_m)$，

因此 $\mathscr{B}\models\exists x_1\cdots x_m\,[\varphi_1(a_1,\cdots,a_n,x_1,\cdots,x_m)\wedge\cdots\wedge\varphi_r(a_1,\cdots,a_n,x_1,\cdots,x_m)]$。由 $\mathscr{U}\prec\mathscr{B}$，有

$\mathscr{U}\models\exists x_1\cdots x_m(\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_r)$。

由于 $\varphi_1,\cdots,\varphi_r$ 中无量词，因此 $\exists x_1\cdots x_m(\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_r)$ 是 $\mathscr{L}(A)$ 的存在句，在扩充模型下保持，这样

$\mathscr{C}\models\exists x_1\cdots x_m(\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_r)$。

由 $\mathscr{C}\models T$，$\mathscr{C}\models\Delta_{\mathscr{C}}$ 知 $T\cup\Delta_{\mathscr{C}}\cup\Delta_{\mathscr{B}}$ 有限和谐，由紧致性定理知

$T\cup\Delta_{\mathscr{C}}\cup\Delta_{\mathscr{B}}$ 有模型 $\mathscr{D}'$，设其在 $\mathscr{L}(A)$ 中的归约为 $\mathscr{D}$，则 $\mathscr{D}$ 满足要求。由命题 12.3.1 $\mathscr{D}\Vdash\psi$，由于 $\mathscr{B}$ 是无限兼纳模型，易见必须有 $\mathscr{B}\Vdash\psi$，而不能 $\mathscr{B}\Vdash\neg\psi$，否则 $\mathscr{D}\Vdash\neg\psi$ 导致矛盾. 再由于 $\mathscr{B}$ 是无限兼纳模型必有 $\mathscr{B}\models\psi$，而由 $\mathscr{U}\prec\mathscr{B}$ 可得到 $\mathscr{U}\models\psi$，完成归纳. 因此 $\mathscr{U}$ 也是 Σ 的无限兼纳模型。 ▮

命题 12.3.8 中 Σ 如不是归纳理论 T 的模型类则结论可能不成立. 因为证明中所用的模型 $\mathscr{D}$ 不一定还属于 Σ. 当 Σ 是某归纳理论 T 的模型类 Σ_T 时，用命题 12.3.8 的结论可代替定理 12.3.7 中第三个条件：

定理 12.3.9 设 Σ 是某归纳理论 T 的模型类，则 Σ 的无限兼纳模型子类 G 是满足下列性质的唯一的子类 H：

(1) Σ 的每个模型都可以扩充为 H 的某个模型；

(2) H 的任意两个模型 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$，若 $\mathscr{U}\subset\mathscr{B}$ 则 $\mathscr{U}\prec\mathscr{B}$；

(3) 设 $\mathscr{U}\in\Sigma$，$\mathscr{B}\in H$，如果 $\mathscr{U}\prec\mathscr{B}$ 则 $\mathscr{U}\in H$.

证明 因为 H 满足 (1)，(2)，由定理 12.3.7 知 $H\subset G$. 我们还要证明 $G\subset H$，设 $\mathscr{U}\in G$，由 (1) 知存在 $\mathscr{B}_1\in H$，使 $\mathscr{U}\subset\mathscr{B}_1$，也存在 $\mathscr{U}_1\in G$，使 $\mathscr{B}_1\subset\mathscr{U}_1$，重复这一过程得到链：

$\mathscr{U}=\mathscr{U}_0\subset\mathscr{B}_1\subset\mathscr{U}_1\subset\mathscr{B}_2\subset\cdots\subset\mathscr{U}_n\subset\mathscr{B}_n\subset\cdots$，$n<\omega$. 对任意 $n<\omega$，$\mathscr{U}_n\in G$，$\mathscr{B}_n\in H$，令 $\mathscr{U}_\omega=\bigcup_{n<\omega}\mathscr{U}_n$，则 $\mathscr{U}_\omega=\bigcup_{n<\omega}\mathscr{B}_n$，由 G 和 H 满足 (2) 知 $\mathscr{U}_n$，$n<\omega$，$\mathscr{B}_n$，$n<\omega$，都是初等链，因此有 $\mathscr{U}\prec\mathscr{U}_\omega$，$\mathscr{B}_1\prec\mathscr{U}_\omega$，由 $\mathscr{U}\subset\mathscr{B}_1$ 易见必有 $\mathscr{U}\prec\mathscr{B}_1$（见命题 3.2.8 (iii)）. 再由 $\mathscr{B}_1\in H$ 满足 (3)，从而 $\mathscr{U}\in H$. ▮

设 T 是 $\mathscr{L}$ 的一个和谐理论，$T_\forall=\{\varphi\in\Pi_1 : T\models\varphi\}$ 是 T 的全称推论。令 $\Sigma=\Sigma_{T_\forall}$，即 Σ 是 $T_\forall$ 的模型类，也是 T 的模型的子模型的类（见命题 4.3.4），易见 Σ 是归纳类，Σ 满足 12.3.7，12.3.9. 本节余下的部分总假定 $\Sigma=\Sigma_{T_\forall}$.

像有限力迫一样，我们也可以考虑弱力迫. 设 $\mathscr{U}\in\Sigma$，$\varphi\in\mathscr{L}(A)$，定义 $\mathscr{U}$ 弱无限力迫 φ，记作 $\mathscr{U}\Vdash^*\varphi$，当且仅当

$\mathscr{U} \Vdash \neg\neg\varphi$,于是我们也有与有限弱力迫类似的性质。

命题 12.3.10

(i) 若 $\mathscr{U}, \mathscr{B} \in \Sigma$, $\mathscr{U} \subset \mathscr{B}$, $\varphi \in \mathscr{L}(A)$, $\mathscr{U} \Vdash^{*} \varphi$, 则 $\mathscr{B} \Vdash^{*} \varphi$;

(ii) $\mathscr{U} \Vdash^{*} \neg\varphi$ 当且仅当 $\mathscr{U} \Vdash \neg\varphi$;

(iii) $\mathscr{U} \Vdash^{*} \forall x \varphi(x)$ 当且仅当对任意 $a \in A$, $\mathscr{U} \Vdash^{*} \varphi(a)$.

证明留作练习.

命题 12.3.11

(i) 若 $\mathscr{U}$ 是 Σ 的无限兼纳模型, 如果 $\mathscr{U} \Vdash^{*} \varphi$ 则 $\mathscr{U} \Vdash \varphi$;

(ii) 若 $\mathscr{U} \in \Sigma$, 对任意 $\varphi \in \mathscr{L}(A)$, $\mathscr{U} \Vdash^{*} \varphi$ 当且仅当 $\mathscr{U} \models \varphi$, 则 $\mathscr{U}$ 是 Σ 的无限兼纳模型。

证明 (i) 设 $\mathscr{U}$ 是无限兼纳模型, $\mathscr{U} \Vdash^{*} \varphi$, 即 $\mathscr{U} \Vdash \neg\neg\varphi$ 则 $\mathscr{U} \nVdash \neg\varphi$, 因此 $\mathscr{U} \Vdash \varphi$.

(ii) 对 $\mathscr{L}(A)$ 的句子 φ 的复杂性归纳证明: $\mathscr{U} \models \varphi$ 当且仅当 $\mathscr{U} \Vdash \varphi$。对原子句, $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$, $\varphi = \psi_1 \vee \psi_2$, $\varphi = \exists x \psi(x)$ 易证. 设 $\varphi = \neg\psi$, 如果 $\mathscr{U} \models \varphi$, 由题设知 $\mathscr{U} \Vdash^{*} \neg\psi$, 由命题 12.3.10 (ii) $\mathscr{U} \Vdash \neg\psi$。如果 $\mathscr{U} \nvDash \neg\psi$, 则 $\mathscr{U} \models \psi$, 由归纳假设 $\mathscr{U} \Vdash \psi$, 因此 $\mathscr{U} \nVdash \neg\psi$. ▌

设 T 是 $\mathscr{L}$ 的一个和谐理论, $\Sigma = \Sigma_{T_\forall}$, 令 $T^F = \{\varphi \in \mathscr{L}: \mathscr{U} \Vdash^{*} \varphi, \mathscr{U} \in \Sigma\}$, 即 T^F 是 $\mathscr{L}$ 中被 Σ 的每个模型无限弱力迫的句子的集合, 称 T^F 是理论 T 的**无限力迫伴随理论**。

命题 12.3.12 (i) 设 $\mathscr{U} \in \Sigma$, $\mathscr{U}$ 是无限兼纳模型, 则 $\mathscr{U} \models T^F$.

(ii) 设 $\varphi \in \mathscr{L}$, 对 Σ 的任意无限兼纳模型 $\mathscr{U}$, $\mathscr{U} \models \varphi$, 则 $\varphi \in T^F$.

证明 (i) 设 $\mathscr{U}$ 是 Σ 的无限兼纳模型, $\varphi \in T^F$, 由 T^F 的定义, $\mathscr{U} \Vdash^{*} \varphi$, 由命题 12.3.11 (i), $\mathscr{U} \models \varphi$, 因此 $\mathscr{U} \models T^F$.

(ii) 设 $\varphi \notin T^F$, 则存在模型 $\mathscr{U} \in \Sigma$, $\mathscr{U} \nVdash^{*} \varphi$, 则必存在模型 $\mathscr{B} \in \Sigma$, 使 $\mathscr{U} \subset \mathscr{B}$, $\mathscr{B} \Vdash \neg\varphi$, 这样必有无限兼纳模型 $\mathscr{C} \supset \mathscr{B}$, 使 $\mathscr{C} \Vdash \neg\varphi$, 从而 $\mathscr{C} \models \neg\varphi$. ▌

由命题 12.3.12 可知 T^F 也可以这样定义：$T^F=\mathrm{Th}G$，即 $T^F=\{\varphi: \mathscr{U}\models\varphi,\ \mathscr{U}\in G\}$. 这就是说 T 的无限力迫伴随理论 T^F 是 Σ 的无限兼纳模型类决定的理论。

命题 12.3.13 设 T 是 $\mathscr{L}$ 的一个和谐理论，则

(i) $T^F=(T_\forall)^F$；

(ii) $(T^F)_\forall=T_\forall$；

(iii) $T^{FF}=T^F$；

(iv) $(T_1)_\forall=(T_2)_\forall$ 当且仅当 $T_1^F=T_2^F$，这里 T_1、T_2 是 $\mathscr{L}$ 的二个理论.

证明 (i) 由 T 和 $T_\forall$ 决定的模型类 Σ 完全相同可知 T 和 $T_\forall$ 有相同的无限兼纳模型类，因此有相同的无限力迫伴随理论。

(ii) 设 $\varphi\in\mathscr{L}(\Pi_1)$，即 φ 是 $\mathscr{L}$ 中一个全称句. 如果 $\varphi\in T_\forall$，则对任意 $\mathscr{U}\in\Sigma$ 有 $\mathscr{U}\models\varphi$，当然对任意 $\mathscr{U}\in G$ 也有 $\mathscr{U}\models\varphi$，由命题 12.3.12 (ii)，$\varphi\in T^F$。由于 $\varphi\in\Pi_1$，当然也有 $\varphi\in(T^F)_\forall$. 这样 $T_\forall\subset(T^F)_\forall$。设 $\varphi\notin T_\forall$，则存在 $\mathscr{U}\in\Sigma$，使 $\mathscr{U}\models\neg\varphi$，我们有 $\mathscr{B}\in G$，$\mathscr{U}\subset\mathscr{B}$，由 $\neg\varphi\in\Sigma_1$ 可知 $\neg\varphi$ 在扩充模型下保持，因此有 $\mathscr{B}\models\neg\varphi$，即 $\neg\varphi\notin(T^F)_\forall$，从而 $(T^F)_\forall\subset T_\forall$。合此两者可得 $T_\forall=(T^F)_\forall$.

(iii)、(iv) 可由 (i)、(ii) 得到，证明留作练习。 ▌

命题 12.3.14 T^F 是完备理论当且仅当 T 有**同时嵌入性质**，即 T 的任意两个模型能同时嵌入 T 的另一个模型中。

证明 设理论 T 有同时嵌入性质，证明 T^F 是完备理论. 设 φ 是 $\mathscr{L}$ 中任一句子，$\varphi\notin T^F$，即存在 Σ 的一个无限兼纳模型 $\mathscr{U}$，使 $\mathscr{U}\not\models\varphi$，则 $\mathscr{U}\models\neg\varphi$，从而 $\mathscr{U}\ \Vdash\neg\varphi$. 设 $\mathscr{B}$ 是 Σ 中任意无限兼纳模型，我们断定必有 $\mathscr{B}\ \Vdash\neg\varphi$，否则如果 $\mathscr{B}\ \Vdash\varphi$，由于 $\mathscr{U}$、$\mathscr{B}\in\Sigma$，$\mathscr{U}$、$\mathscr{B}$ 都可以扩充为 T 的模型，因而可以同时嵌入 T 的另一个模型 $\mathscr{C}$，当然也有 $\mathscr{C}\in\Sigma$，由 $\mathscr{U}\subset\mathscr{C}$. 可得 $\mathscr{C}\ \Vdash\neg\varphi$. 由 $\mathscr{B}\subset\mathscr{C}$ 可得 $\mathscr{C}\ \Vdash\varphi$，矛盾。这样由命题 12.3.12 (ii) $\neg\varphi\in T^F$.

因此 T^F 是 $\mathscr{L}$ 的完备理论。

反过来设 T^F 是完备理论。设 $\mathscr{U}$、$\mathscr{B}\models T$，则 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}\in\Sigma$，由命题 12.3.2，$\mathscr{U}$、$\mathscr{B}$ 可以分别扩充为 Σ 的无限兼纳模型 $\mathscr{U}_1$，$\mathscr{B}_1$，使 $\mathscr{U}\subset\mathscr{U}_1$，$\mathscr{B}\subset\mathscr{B}_1$. 由命题 12.3.12 (i) $\mathscr{U}_1$，$\mathscr{B}_1\models T^F$，由 T^F 是完备理论知 $\mathscr{U}_1\equiv\mathscr{B}_1$，由命题 4.3.6 知存在 $\mathscr{L}$ 的模型 $\mathscr{C}$，使 $\mathscr{U}_1\preccurlyeq\mathscr{C}$，$\mathscr{B}_1\preccurlyeq\mathscr{C}$. 因此 $\mathscr{C}\models T^F$. 由命题 12.3.13 (ii) $(T^F)_\forall=T_\forall$，因此 $\mathscr{C}\in\Sigma$，$\mathscr{C}$ 可以扩充为 T 的模型 $\mathscr{D}$，这样由 $\mathscr{U}\widetilde{\subset}\mathscr{D}$，$\mathscr{B}\widetilde{\subset}\mathscr{D}$，$T$ 有同时嵌入性质。 ▌

练习

12.3.1 证明命题 12.3.1.

12.3.2 证明命题 12.3.10.

12.3.3 设 T 是 $\mathscr{L}$ 的一个和谐理论，$\Sigma=\Sigma_{T_\forall}$，证明对 Σ 中任意模型 $\mathscr{U}$ 都存在 Σ 的无限兼纳模型 $\mathscr{B}$，使 $\mathscr{U}\subset\mathscr{B}$，且 $|A|\leqslant|B|\leqslant|A|+\|\mathscr{L}\|$.

12.3.4 证明命题 12.3.13 中的 (iii)，(iv).

第十三章　$\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$逻辑模型论

这一章我们介绍无穷长逻辑模型论的一些基本概念。

设 α，β 是无限基数，无穷长语言 $\mathscr{L}_{\alpha\beta}$中非逻辑符号和逻辑符号都与一阶语言 $\mathscr{L}$ 中的符号一样，但 $\mathscr{L}_{\alpha\beta}$中有势为 β 的个体变元集：x_1，x_2，x_3，…，x_ξ，…，$\xi<\beta$，$\mathscr{L}_{\alpha\beta}$**的公式**定义如下：

(1) 一阶语言 $\mathscr{L}$ 的公式是 $\mathscr{L}_{\alpha\beta}$的公式；

(2) Φ 是 $\mathscr{L}_{\alpha\beta}$的公式集，$|\Phi|<\alpha$ 时，$(\wedge\Phi)$，$(\vee\Phi)$ 也是 $\mathscr{L}_{\alpha\beta}$的公式；

(3) φ 是$\mathscr{L}_{\alpha\beta}$的公式，$x_\xi$：$\xi<\gamma<\beta$ 是 $\mathscr{L}_{\alpha\beta}$中一族个体变元，则 $(\exists x_1\cdots x_\xi\cdots\varphi)$ 和 $(\forall x_1\cdots x_\xi\cdots\varphi)$ 也是 $\mathscr{L}_{\alpha\beta}$的公式。

从 $\mathscr{L}_{\alpha\beta}$的公式的定义可以看出 $\mathscr{L}_{\alpha\beta}$中允许有无穷长的公式，有无穷多个量词，这就是称 $\mathscr{L}_{\alpha\beta}$为无穷长逻辑的原因. 实际上 $\mathscr{L}_{\alpha\beta}$中的公式的长度最长不超过 α，量词的长度最长不超过 β，取 $\alpha=\beta=\omega$ 时，$\mathscr{L}_{\omega\omega}$就是有限长的一阶语言 $\mathscr{L}$. 取 $\alpha=\omega_1$，$\beta=\omega$ 时$\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$语言中公式的长最多可数，量词长至多有限，这就是我们本章要介绍的语言。

$\mathscr{L}_{\alpha\beta}$的句子是 $\mathscr{L}_{\alpha\beta}$的不含自由变元的公式，$\mathscr{L}_{\alpha\beta}$的模型是 $\mathscr{L}$ 的模型，$\mathscr{L}_{\alpha\beta}$的公式在模型中的指派 σ 下的取值定义为：

(1) φ 是 $\mathscr{L}$ 中公式，则 φ 的取值与 $\mathscr{L}$ 中取值一样；

(2) Φ 是 $\mathscr{L}_{\alpha\beta}$的公式集，$|\Phi|<\alpha$，$(\wedge\Phi)$ 在 $\mathscr{U}$ 中指派 σ 下的取值为 1 即 $\mathscr{U}\models_\sigma\wedge\Phi$　当且仅当对任意 $\varphi\in\Phi$，$\mathscr{U}\models_\sigma\varphi$. 而 $\mathscr{U}\models_\sigma\vee\Phi$当且仅当存在一个公式 $\varphi\in\Phi$，$\mathscr{U}\models_\sigma\varphi$；

(3) φ 是 $\mathscr{L}_{\alpha\beta}$ 的公式，x_ξ，$\xi<\gamma<\beta$ 是一族个体变元，$\mathscr{U}\models_\sigma\exists x_1\cdots x_\xi\cdots\varphi$当且仅当存在 $a_\xi\in A$，$\xi<\gamma$，使

$\mathscr{U}\models_{\sigma(x_1/a_1,\cdots,x_\xi/a_\xi,\cdots)}\varphi$. $\mathscr{U}\models_\sigma\forall x_1\cdots x_\xi\cdots\varphi$ 当且仅当对任意 $a_\xi\in A$, $\xi<\gamma$, $\mathscr{U}\models_{\sigma(x_1/a_1,\cdots,x_\xi/a_\xi,\cdots)}\varphi$.

事实上 $\mathscr{L}_{\alpha\beta}$的这个基本语义定义与 $\mathscr{L}$ 中公式的取值是完全一致的，由 $\mathscr{L}_{\alpha\beta}$的公式和基本语义定义，一阶语言 $\mathscr{L}$ 的公式是 $\mathscr{L}_{\alpha\beta}$的公式．一阶语言 $\mathscr{L}$ 的模型是 $\mathscr{L}_{\alpha\beta}$的模型，$\mathscr{L}$ 的恒真式 φ 是 $\mathscr{L}_{\alpha\beta}$的恒真式，这样 $\mathscr{L}_{\alpha\beta}$是 $\mathscr{L}$ 的一个推广．由抽象模型论的 Lindström 定理可知：一阶逻辑 $\mathscr{L}$ 的推广 $\mathscr{L}'$ 如果也有紧致性定理与 L—S—T 定理成立，则 $\mathscr{L}'$ 必与 $\mathscr{L}$ 等价，即 $\mathscr{L}'$ 与 $\mathscr{L}$ 没有实质性的区别。而 $\mathscr{L}_{\alpha\beta}$中紧致性定理不再成立．因此 $\mathscr{L}_{\alpha\beta}$是一阶语言 $\mathscr{L}$ 的真的推广．

例 1 令 $\mathscr{L}=\{c_0, c_1, c_2, \cdots, c_\omega\}$，每个 c_i 都是常量符号，令 $\Sigma=\{\forall x(\bigvee_{n<\omega} x\equiv c_n), c_\omega\not\equiv c_0, c_\omega\not\equiv c_1, \cdots\}$ 则 Σ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的句子集，对 Σ 中任意有限句子集 Σ'，都存在 $n<\omega$，使 $\Sigma'\subset\{\forall x(\bigvee_{n<\omega} x\equiv c_n), c_\omega\not\equiv c_0, \cdots, c_\omega\not\equiv c_n\}$．令 $\mathscr{U}=\langle A, a_0, a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}\rangle$，其中 $A=\{a_0, a_1, \cdots, a_{n+1}\}$ 是 $n+2$ 元集合，以 a_i 作常量符号 c_i 的解释，以 a_{n+1} 作常量 c_ω 的解释，则 $\mathscr{U}\models\Sigma'$．这样句子集 Σ 是有限可满足的，但不难看出，任意模型都不满足 Σ．因为无论把 c_ω 解释成 $\mathscr{U}$ 的什么元素，如 $c_\omega\not\equiv c_0$, $c_\omega\not\equiv c_1$, …都被满足，则 $\forall x\bigvee_{n<\omega} x\equiv c_n$ 就不能被满足。

例 1 说明 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$不满足紧致性定理，当然 $\mathscr{L}_{\alpha\beta}$也都不满足紧致性定理．如果在例 1 中含 $\Sigma_1=\{\forall x\bigvee_{n<\omega} x\equiv c_n\}$，则 Σ_1 的每个模型都是可数模型，Σ_1 可以有可数无限模型，但不能有不可数模型．这说明 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$不满足升 L—S—T 定理．但可以证明对 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的任意可数句子集，如果有模型时，一定有可数模型，也就是说降L—S—T 定理仍然是成立的。

本书将只对可数语言 $\mathscr{L}$ 来介绍无穷长逻辑 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的一些基本的模型论概念。

§ 13.1 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$逻辑的完全性

在给出 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$语言的公理之前，我们先约定一个技术性记号。

对 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$中的任何一个公式 φ，定义 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的一个公式 φ^* 如下：

(1) 如果 φ 是原子公式，$\varphi^* = \neg\varphi$;

(2) 如果 $\varphi = \neg\psi$，则 $\varphi^* = \psi$;

(3) 如果 Φ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的可数公式集，$\varphi = \bigwedge_{\psi\in\Phi}\psi$，则 $\varphi^* = \bigvee_{\psi\in\Phi}\neg\psi$，$\varphi = \bigvee_{\psi\in\Phi}\psi$，则 $\varphi^* = \bigwedge_{\psi\in\Phi}\neg\psi$;

(4) $\varphi = \forall x\psi$，则 $\varphi^* = \exists x\neg\psi$；$\varphi = \exists x\psi$，则 $\varphi^* = \forall x\neg\psi$.

注意 φ^* 不是形式意义上的 $\neg\varphi$，实际上 φ^* 是 $\neg\varphi$ 的一个逻辑变换式，现在我们给出 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的公理。

(1) 设 φ、ψ、τ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的任意公式，下列形式的公式都是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的命题公理。

$Ax1$ $\varphi\to\psi\to\varphi$

$Ax2$ $(\varphi\to\psi\to\tau)\to(\varphi\to\psi)\to\varphi\to\tau$

$Ax3$ $(\neg\varphi\to\neg\psi)\to\psi\to\varphi$

(2) 设 φ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的任意公式，下列形式的公式都是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的量词公理。

$Ax4$ $\forall x(\varphi\to\psi)\to(\varphi\to\forall x\psi)$，$x$ 不在 φ 中自由出现

$Ax5$ $\forall x\varphi\to\varphi(x/t)$，项 t 在 φ 中相对 x 自由

(3) 设 φ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的任意公式，$\Phi$ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的任意可数公式集，下列形式的公式都是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的公理。

$Ax6$ $\neg\varphi\leftrightarrow\varphi^*$

$Ax7$ $\bigwedge\Phi\to\varphi$，$\varphi\in\Phi$

(4) $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的关于等词的公理

$Ax8$ $t\equiv t$、t 是 $\mathscr{L}$ 的任意一个项

$Ax9$ $t_1\equiv t_2\to t_2\equiv t_1$，$t_1$，$t_2$ 是任意二个项

$Ax10\quad (t\equiv x)\wedge\varphi(x)\to\varphi(t)$，$t$ 相对于 x 在 φ 中自由

可以看出一阶形式语言 $\mathscr{L}$ 的所有公理都是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的公理. $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 中实际只增加了一组公理(3)，命题公理和量词公理和等词公理都对 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 公式增加了相应的形式。

$\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的推演法则：

(1) **分离法则** 由 φ、$\varphi\to\psi$ 得 ψ；

(2) **推广法则** 由 φ 得 $\forall x\varphi$；

(3) **归纳法则** 由 $\varphi\to\psi$，对一切 ψ，$\psi\in\Phi$，得 $\varphi\to\bigwedge\Phi$. 其中 Φ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的可数的公式集合.

$\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的推演法则比 $\mathscr{L}$ 增加一条归纳法则 (3)，这是一条无穷长的推演法则，即由无穷多条前提能得出结论来，由于紧致性定理在 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 中不成立，去掉这一条无穷长的推演法则，$\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 就不会是完全的. 直觉地说，没有紧致性定理，从有限推演是不可能过渡到无穷长的公式的. 这样 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的形式推演必须是允许无限长的证明的.

$\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的从公理出发到公式 φ 的一个**证明**是指 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的可数多个公式组成的一个序列

φ_0，φ_1，…，φ_n，…，φ

其中每个 φ_i 或是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的一条公理，或是由其前面的公式经推演法则得到. 如果有从公理出发到 φ 的一个证明，就称 φ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的一个形式定理或简称**定理**，记作 $\vdash_{\mathscr{L}_{\omega_1\omega}}\varphi$。不引起歧义时也简记作 $\vdash\varphi$。从 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的公式集 Γ 出发的推演也类似定义，设 φ 是一阶逻辑句子，$\vdash\varphi$ 则必有 $\vdash_{\mathscr{L}_{\omega_1\omega}}\varphi$。

读者容易验证，$\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的可靠性定理是成立的。

定理 13.1.1 (**可靠性定理**) 设 $\Gamma\vdash\varphi$，$\mathscr{U}\models\Gamma$，则 $\mathscr{U}\models\varphi$.

与一阶语言 $\mathscr{L}$ 中一样，对一个公式 φ，$\mathscr{U}\models\varphi$ 是指对 $\mathscr{U}$ 的任

何一个指派下 φ 都取真值，限制到某个指派 σ 时，可靠性就不一定成立了。

下面我们着手证明完全性定理，我们知道只要证明 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的和谐公式集都是可满足的，有模型就可以。我们仍用一阶逻辑中的常量方法来构造模型，我们先给出几个有关的概念。

φ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的一个公式，φ 的**子公式的集合** $\mathrm{sub}(\varphi)$ 定义如下：

(1) 若 φ 是原子公式，$\mathrm{sub}(\varphi)=\{\varphi\}$；

(2) $\mathrm{sub}(\neg\psi)=\mathrm{sub}(\psi)\cup\{\neg\psi\}$；

(3) $\mathrm{sub}(\forall x\psi)=\mathrm{sub}(\psi)\cup\{\forall x\psi\}$；

(4) $\mathrm{sub}(\bigwedge\Phi)=\bigcup\limits_{\psi\in\Phi}\mathrm{sub}(\psi)\cup\{\bigwedge\Phi\}$.

对 $\varphi=\exists x\psi$，$\varphi=\bigvee\Phi$ 等类似定义。

设 $\mathscr{L}$ 是可数语言，C 是可数无限新常量集，令 $\mathscr{L}'=\mathscr{L}\cup C$. 令 P 是 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$ 中可数句子集合所组成的集合. 如果 P 适合下列条件，就称为 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$ 的**和谐性质集**：对任意一个可数集 $p\in P$：

(C1) 对 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$ 中任意句子 φ，$\varphi\notin p$ 或 $\neg\varphi\notin p$；

(C2) 如果 $\neg\varphi\in p$，则 $p\cup\{\varphi^*\}\in P$；

(C3) 如果 $\bigwedge\Phi\in p$，Φ 是可数句子集，则对每个 $\psi\in\Phi$，$p\cup\{\psi\}\in P$；

(C4) 如果 $\bigvee\Phi\in p$，Φ 是可数句子集，则有某个 $\psi\in\Phi$，$p\cup\{\psi\}\in P$：

(C5) 如果 $\forall x\varphi(x)\in p$，则对每个 $c\in C$，$p\cup\{\psi(c)\}\in P$；

(C6) 如果 $\exists x\varphi(x)\in p$，则对某个 $c\in C$，$p\cup\{\varphi(c)\}\in P$；

(C7) 设 t 是 $\mathscr{L}'$ 的一个闭项，c，$d\in C$，

1. 如果 $c\equiv d\in p$，则 $p\cup\{d\equiv c\}\in P$；

2. 如果 $t\equiv c$，$\varphi(t)\in p$，则 $p\cup\{\varphi(c)\}\in P$；

3. 一定有某个 $c\in C$，$p\cup\{t\equiv c\}\in P$.

容易看出如果 P 是 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$ 的和谐性质集，则

(i) P 的所有元素的所有子集所成的集合也是 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$ 的和谐

性质集.

(ii) P 中一切元素的只有有限多个新常量 $c\in C$ 出现的子集所成的集也是 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$的和谐性质集.

(iii) P 的一切元素的所有有限子集所成的集也是 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$的和谐性质集.

命题 13.1.1 设 P 是 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$的和谐性质集，对任意 $q\subset p\in P$，都有 $q\in P$，则 P 有如下性质：

(i) 如果 $p\in P$，φ，$\varphi\to\psi\in p$，则 $p\cup\{\psi\}\in P$；

(ii) 如果 $p\in P$，对任意 $c\in C$，有 $p\cup\{c\equiv c\}\in P$；

(iii) 如果 $p\in P$，c，d，$e\in C$，$c\equiv d$，$d\equiv e\in p$，则 $p\cup\{c\equiv e\}\in p$.

请读者给出证明.

设 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{L}(C)$的一个可数模型，$\mathscr{U}$ 所满足的 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$的句子的可数集的集合一定是一个和谐性质集. $\mathscr{U}$ 所满足的 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$的句子的有限集所成的集合也是和谐性质集。

设 Γ 是 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$的一个公式集，以 Γ^c 记 Γ 的**子公式闭包**，Γ^c 是适合下列条件的最小的公式集.

($\bar{1}$) $\Gamma\subset\Gamma^c$.

($\bar{2}$) 任意 $\varphi\in\Gamma^c$，则 $\mathrm{sub}(\varphi)\subset\Gamma^c$.

($\bar{3}$) 设 t 是 $\mathscr{L}$ 的项，$c\in C$，$\varphi(t)\in\Gamma^c$，则 $\varphi(c)\in\Gamma^c$.

($\bar{4}$) 若 $\neg\varphi\in\Gamma^c$，则 $\varphi^{*}\in\Gamma^c$.

($\bar{5}$) 若 t 是项，$c\in C$，则 $t\equiv c\in\Gamma^c$.

对每个公式集 Γ 易见 Γ^c 一定存在，因为包含 Γ 而满足 ($\bar{1}$)—($\bar{5}$) 的公式集一定存在，比如 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$的全体公式的集合就是. 令 Γ^c 是所有包含 Γ 而满足 ($\bar{1}$) — ($\bar{5}$) 的公式集的交，Γ^c 就是最小的一个公式集了，当然也可由 Γ 出发逐步增加 Γ 中公式的子公式和满足 ($\bar{1}$) — ($\bar{5}$) 的各种公式，经可数多步后，可得 Γ^c。如果 Γ 是可数公式集则 Γ^c 也是可数集. 令 $\bar{\Gamma}$ 是 Γ^c 中一切句子所成的集

合，称 $\overline{\Gamma}$ 是 Γ 的子句子闭包。

定理 13.1.2 （**模型存在定理**）设 $\mathscr{L}$ 可数，$\mathscr{L}'=\mathscr{L}\cup C$. C 是可数新常量集，P 是 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$的和谐性质集，$p_0\in P$，则 p_0 有模型，即有 $\mathscr{L}$ 的模型 $\mathscr{U}$，$\mathscr{U}\models p_0$.

证明 不妨设 P 的每个元素的每个子集仍是 P 的元素，否则可以扩充 P 满足条件，得到的仍是 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$的和谐性质集。令 $\overline{p}_0$ 是 p_0 的子句子闭包。列出 $\overline{p}_0$ 的全体句子：φ_0，φ_1，φ_2，…，φ_n，…，$n<\omega$. 令 T 是 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$的所有的项组成的集合，列出 T 中所有的项为 t_0，t_1，t_2，…，t_n，…，$n<\omega$. 我们构造 P 的元素的一个递增序列

$p_0\subset p_1\subset p_2\subset\cdots\subset p_n\subset\cdots$，$n<\omega$

对每个 $n<\omega$，p_{n+1}适合下列条件：

(1) $p_n\subset p_{n+1}\subset\overline{p}_0$.

(2) 如果 $p_n\cup\{\varphi_n\}\in P$，则 $\varphi_n\in p_{n+1}$.

(3) 如果 $p_n\cup\{\varphi_n\}\in P$ 且有 $\varphi_n=\bigvee\Phi$，则存在某个 $\psi\in\Phi$，使 $\psi\in p_{n+1}$.

(4) 如果 $p_n\cup\{\varphi_n\}\in P$，且 $\varphi_n=\exists x\psi(x)$，则有某 $c\in C$. 使 $\psi(c)\in p_{n+1}$.

(5) 存在某 $c\in C$，使 $t_n\equiv c\in p_{n+1}$.

不难看出以上 5 条是可以实现的．令 $p_\omega=\bigcup\limits_{h<\omega}p_n$，我们来构造 p_ω 的模型．先在常量集 C 上定义二元关系～：对任何 c、$d\in C$，$c\sim d$当且仅当 $c\equiv d\in p_\omega$。我们来证明～是 C 上等价关系。

(i) 对任意 $c\in C$，c 是 $\mathscr{L}'$的项，由 $(\overline{5})$ $c\equiv c\in\overline{p}_0$

因此必有 $n<\omega$，使 $\varphi_n=c\equiv c$，由命题 13.1.1 (ii) $p_n\cup\{c\equiv c\}\in P$，由 p_ω 的构造 (2) 知 $c\equiv c\in p_{n+1}$，因此 $c\equiv c\in p_\omega$，则 $c\sim c$，～满足自反性。

(ii) 设 $c\sim d$，即 $c\equiv d\in p_\omega$，因此有 $n<\omega$，$c\equiv d\in p_n$，由$(\overline{5})$知 $d\equiv c\in\overline{p}_0$，有 $m<\omega$,使 $\varphi_m=d\equiv c$，如果 $m\geqslant n$，则 $c\equiv d\in p_n\subset p_m$，

由 (C7) 1，$p_m \cup \{d \equiv c\} \in P$，由 (2) 有 $d \equiv c \in p_{m+1} \subset p_\omega$，如果 $m < n$，则 $p_m \subset p_n$ 有 $p_m \cup \{c \equiv d\} \subset p_n$. 由 P 包含一切元素的一切子集，因此有 $p_m \cup \{c \equiv d\} \in P$. 由 (C7) 1 又有
$p_m \cup \{c \equiv d\} \cup \{d \equiv c\} \in P$，再由 P 的如上性质 $p_m \cup \{d \equiv c\} \in P$. 这样由 (2) 也有 $d \equiv c \in p_{m+1} \subset p_\omega$. 因此 $d \equiv c \in p_\omega$. $d \sim c$. 对称性成立.

(iii) 设 $c \sim d$，$d \sim e$，即 $c \equiv d$，$d \equiv e \in P_\omega$，存在 $n < \omega$，使 $c \equiv d$，$d \equiv e \in P_n$，由 ($\bar{5}$) $c \equiv e \in \bar{p}_0$，必有 $m < \omega$ 使 $\varphi_m = c \equiv e$，仿 (ii) 讨论用 (C7) (3) 可知一定有 $P_m \cup \{c \equiv e\} \in P$，由 (2) 也有 $c \equiv e \in p_{m+1}$，因此有 $c \equiv e \in p_\omega$，所以 $c \sim e$，即传递性成立。

对任意的 $c \in C$，以 $\tilde{c} = \{c' \in C: c' \sim c\}$ 记 c 所在的等价类，令 $A = \{\tilde{c}: c \in C\}$，即 A 是 C 的所有等价类的集合。以 A 作论域定义 $\mathscr{L}$ 上非逻辑符号的解释如下：

(6) 对 $\mathscr{L}$ 的任意闭项 t，由 (5) 存在 $c \in C$，使 $t \equiv c \in p_\omega$，用 $\tilde{c}$ 作闭项 t 的解释，即 $t^{\mathscr{U}} = c$ 当且仅当 $t \equiv c \in p_\omega$.

(7) 对 $\mathscr{L}$ 的任意 n 元关系符号 R，定义 A 上 n 元关系 $R^{\mathscr{U}}$ 作 R 的解释，对任意 $c_1, \cdots, c_n \in C$

$R^{\mathscr{U}}(\tilde{c}_1, \cdots, \tilde{c}_n)$ 成立当且仅当 $R(c_1, \cdots, c_n) \in p_\omega$.

(8) 对 $\mathscr{L}$ 的任意 m 元函数符号 F，以 $F^{\mathscr{U}}$ 作 F 的解释，对任意 $c_1, \cdots, c_m \in C$，由 $F(c_1, \cdots, c_m)$ 是 $\mathscr{L}'$ 的一个项知存在 $c \in C$，使 $F(c_1, \cdots, c_m) \equiv c \in p_\omega$。令 $F^{\mathscr{U}}(\tilde{c}_1, \cdots, \tilde{c}_m) = \tilde{c}$.

我们还要证明以上定义与代表元取法无关，我们只以 (7) 定义的关系 R 来证明，常量与函数的定义类似可证。

设 R 是 $\mathscr{L}$ 的 n 元关系符号，$c_1, \cdots, c_n, c'_1, \cdots, c'_n \in C$，$c_1 \sim c'_1, \cdots, c_n \sim c'_n$，我们要证明 $R^{\mathscr{U}}(\tilde{c}_1, \cdots, \tilde{c}_n)$ 成立当且仅当 $R^{\mathscr{U}}(\tilde{c}'_1, \cdots, \tilde{c}'_n)$ 成立，显然只需证明一个方向。

设 $R^{\mathscr{U}}(\tilde{c}_1, \cdots, \tilde{c}_n)$ 成立，即 $R(c_1, \cdots, c_n) \in p_\omega$，由 $c_1 \sim c'_1, \cdots, c_n \sim c'_n$ 有 $c_1 \equiv c'_1, \cdots, c_n \equiv c'_n \in p_\omega$，因此有 $m < \omega$，使 $R(c_1, \cdots, c_n)$，

$c_1\equiv c'_1$，…，$c_n\equiv c'_n\in p_m$. 由 $p_m\subset\bar{p}_0$ 知 $R(c_1,\cdots,c_n)\in\bar{p}_0$，由($\bar{3}$)可知也有 $R(c'_1,\cdots,c'_n)\in\bar{p}_0$，因此也有$l<\omega$,使 $\varphi_l=R(c'_1,\cdots,c'_n)$。设 $l\geqslant m$ 则 $R(c_1,\cdots,c_n)$，$c_1\equiv c'_1$，…，$c_n\equiv c'_n\in p_l$。由(C7)（2）可知有 $p_l\cup\{R(c'_1,\cdots,c'_n)\}\in P$，再由（2）有 $R(c'_1,\cdots,c'_n)\in p_{l+1}\subset p_\omega$。设 $m<l$，由 $p_l\subset p_m$，$p_m\cup\{R(c'_1,\cdots,c'_n)\}\in P$ 以及 P 的任意元素的任意子集都是 P 的元素知有 $p_l\cup\{R(c'_1,\cdots,c'_n)\}\in P$. 从而也有 $R(c'_1,\cdots,c'_n)\in p_{l+1}\subset p_\omega$，这样 $R^{\mathscr{U}}(\tilde{c}'_1,\cdots,\tilde{c}'_n)$成立。

由于（6），（7）（8）都与代表元的取法无关知都是良定义的，因此以 A 为论域构成了 $\mathscr{L}$ 的模型 $\mathscr{U}$,现在我们来证明对 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$的任意句子 φ，如果 $\varphi\in p_\omega$，则 $\mathscr{U}\models\varphi$.

（9）设 φ 是原子句 $t_1\equiv t_2\in p_\omega$，其中 t_1，t_2 是 $\mathscr{L}'$ 的闭项，已知 $c_1,c_2\in C$，使 $t_1^{\mathscr{U}}=\tilde{c}_1,t_2^{\mathscr{U}}=\tilde{c}_2$，即 $t_1\equiv c_1,t_2\equiv c_2\in p_\omega$。这样存在$n<\omega$，使 $t_1\equiv t_2$，$t_1\equiv c_1$，$t_2\equiv c_2\in p_n$。又由 $c_1\equiv c_2\in\bar{p}_0$，有$m<\omega$,使 $\varphi_m=(c_1\equiv c_2)$。这样无论 $m\geqslant n$ 还是 $m<n$ 都可以证明有 $p_m\cup\{c_1\equiv c_2\}\in P$. 由(2)有 $c_1\equiv c_2\in p_{m+1}$，因而有 $c_1\sim c_2$，即$c_1=c_2$. 这样 $\mathscr{U}$ 中 $t_1^{\mathscr{U}}=t_2^{\mathscr{U}}$ 即 $\mathscr{U}\models t_1\equiv t_2$.

（10）设 φ 是原子句 $R(t_1,\cdots,t_n)\in p_\omega$，其中 t_1，…，t_n 是 $\mathscr{L}'$ 的闭项。已知有 $c_1,\cdots,c_n\in C$，使 $t_1^{\mathscr{U}}=\tilde{c}_1,\cdots t_n^{\mathscr{U}}=\tilde{c}_n$，即$t_1\equiv c_1,\cdots,t_n=c_n\in p_\omega$，这样有$n<\omega$，使$R(t_1,\cdots,t_n)$，$t_1\equiv c_1,\cdots,t_n\equiv c_n\in p_n$。由 $p_n\subset\bar{p}_0$ 知 $R(t_1,\cdots,t_n)\in\bar{p}_0$。由($\bar{3}$)可知有 $R(c_1,\cdots,c_n)\in\bar{p}_0$，于是有 $m<\omega$，使 $\varphi_m=R(c_1,\cdots,c_n)$，无论 $m\geqslant n$，还是$m<n$ 由(C7)（2）和 P 的任意元素的任意子集都是 P 的元素可知有 $p_m\cup\{R(c_1,\cdots,c_n)\}\in P$。由（2）有$R(c_1,\cdots,c_n)\in p_{m+1}\subset p_\omega$，因此有 $R^{\mathscr{U}}(\tilde{c}_1,\cdots,\tilde{c}_n)$成立。

（11）$\varphi=\neg\psi\in p_\omega$，$\psi$ 是原子句。如果 ψ 是 $t_1\equiv t_2$，只要把(9)中 $t_1\equiv t_2$ 改为$\neg(t_1\equiv t_2)$就可证$\neg c_1\equiv c_2\in p_\omega$，因此有 $t_1^{\mathscr{U}}\neq t_2^{\mathscr{U}}$ 即

$\mathscr{U}\models\neg\psi$。如果 ψ 是 $R(t_1,\cdots,t_n)$，只要在（10）中把 $R(t_1,\cdots,t_n)$ 改为 $\neg R(t_1,\cdots,t_n)$ 就可以证明有 $\neg R(c_1,\cdots,c_n)\in p_\omega$，因此 $R^{\mathscr{U}}(\bar{c}_1,\cdots,\bar{c}_n)$ 不成立，即 $\mathscr{U}\models\neg\psi$.

（12）设 $\varphi=\bigvee\Phi$，Φ 是可数句子集，$\varphi\in p_\omega$，这就存在 $n<\omega$，使 $\varphi\in p_n$，由 $p_n\subset\overline{p}_0$，知 $\varphi\in\overline{p}_0$，由($\bar{2}$)因此有 $m<\omega$，使 $\varphi_m=\varphi$，这样必有 $p_m\cup\{\varphi_m\}\in P$，再由（3）知存在 $\psi\in\Phi$，使 $\psi\in p_{m+1}\subset p_\omega$，由归纳假设有 $\mathscr{U}\models\psi$，根据基本语义定义（2）知 $\mathscr{U}\models\bigvee\Phi$ 即 $\mathscr{U}\models\varphi$.

（13）设 $\varphi=\exists x\psi(x)\in p_\omega$，仿（12）由（4）及基本语义定义（3）可证 $\mathscr{U}\models\varphi$.

（14）设 $\varphi=\neg\psi\in p_\omega$，有 $\neg\psi\in\overline{p}_0$，由($\bar{4}$)知 $\psi^*\in\overline{p}_0$. 设 $\psi_m=\psi^*$，$\varphi\in p_n$，不妨设 $n\geqslant m$，由(C2) $p_n\cup\{\psi^*\}\subseteq P$. 因此有 $p_m\cup\{\psi^*\}\subset P$. 由（2）有 $\psi^*\in p_{n+1}$，则 $\psi^*\in p_\omega$，①如果 ψ 是原子句，由（11）已知 $\mathscr{U}\models\varphi$。②如果 ψ 是 $\neg\sigma$ 形句子，则 $\psi^*=\sigma$，由 $\sigma\in p_\omega$ 和归纳假设有 $\mathscr{U}\models\sigma$，因此 $\mathscr{U}\models\varphi$。③如果 $\psi=\bigwedge\Phi$ 则 $\psi^*=\bigvee_{\sigma\in\Phi}\neg\sigma\in p_\omega$. 由（12）有 $\sigma\in\Phi$，使 $\neg\sigma\in p_\omega$，由归纳假设有 $\mathscr{U}\models\neg\sigma$，因此 $\mathscr{U}\models\neg\bigwedge\Phi$，即 $\mathscr{U}\models\varphi$，④如果 $\psi=\bigvee\Phi$，则 $\psi^*=\bigwedge_{\sigma\in\Phi}\neg\sigma\in p_\omega$，有 $\bigwedge_{\sigma\in\Phi}\neg\sigma\in\overline{p}_0$，对每个 $\sigma\in\Phi$，有 $\neg\sigma\in\overline{p}_0$，因此存在 $m'<\omega$，使 $\varphi_{m'}=\neg\sigma$，不妨设有 $n\geqslant m'$，$\psi^*\in p_n$，由（C3）知 $p_n\cup\{\neg\sigma\}\in P$，因此 $p_m\cup\{\neg\sigma\}\in P$，由(2)有 $\neg\sigma\in p_{m'+1}\subset p_\omega$，由归纳假设 $\mathscr{U}\models\neg\sigma$，这样 $\mathscr{U}\models\bigwedge_{\sigma\in\Phi}\neg\sigma$. 由基本语义定义 $\mathscr{U}\models\neg\bigvee\Phi$，即 $\mathscr{U}\models\neg\psi$，$\mathscr{U}\models\varphi$，⑤如果 $\psi=\forall x\psi_1(x)$，则 $\psi^*=\exists x\neg\psi_1(x)$，由（13）有 $\mathscr{U}\models\psi^*$，再由基本语义定义有 $\mathscr{U}\models\varphi$，⑥如果 $\psi=\exists x\psi_1(x)$，则 $\psi^*=\forall x\neg\psi_1(x)$，由 $\psi^*\in p_\omega$，$\forall x\neg\psi_1(x)\in\overline{p}_0$，因此 $\neg\psi_1(x)\in\overline{p}_0$，对任意 $c\in C$，由（$\bar{3}$）有 $\neg\psi_1(c)\in\overline{p}_0$，令 $\varphi_{m'}=\neg\psi_1(c)$，不妨设有 $n\geqslant m'$，$\psi^*\in p_n$，由(C5)有 $p_n\cup\{\varphi_{m'}\}\in P$，于是 $p_{m'}\cup\{\neg\psi_1(c)\}\in P$，再由（2）知 $\neg\psi_1(c)\in p_{m'+1}\subset p_\omega$，由归纳假设有 $\mathscr{U}\models\neg\psi_1(c)$，由

c 的任意性及基本语义定义知 $\mathscr{U}\models\forall x\neg\psi_1(x)$. 即得 $\mathscr{U}\models\neg\exists x\psi_1(x)$，$\mathscr{U}\models\varphi$.

由以上 (9) — (14) 知对任意 $\varphi\in p_\omega$，都有 $\mathscr{U}\models\varphi$，特别有 $p_0\subset p_\omega$，因此 $\mathscr{U}\models p_0$. ▌

模型存在定理证明的困难在于我们构造的模型 $\mathscr{U}$ 和 p_ω 的关系，没有一阶逻辑中由证据构造的模型和 $\overline{T}$ 的关系那样强。这里 $\varphi\in p_\omega$，则 $\mathscr{U}\models\varphi$，但 $\varphi\in p_\omega$ 不是 $\mathscr{U}\models\varphi$ 的充分必要条件。这就使我们不得不预先把 $\neg\varphi$ 所对应的句子 φ^* 添加到 p_ω 中。$\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 逻辑中模型存在定理可以起到一阶逻辑中紧致性定理的作用，对模型存在定理我们还可以推广。

推论 13.1.2 **（推广的模型存在定理）** 设 P 是 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$ 的和谐性质集，Γ 是 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$ 的可数句子集，如果对每个 $p\in P$，每一 $\varphi\in\Gamma$，都有 $p\cup\{\varphi\}\in P$，则对每个 $p\in P$，$p\cup\Gamma$ 都有模型。

证明 令 $P'=\{p\cup\Gamma : p\in P\}$，可以证明 P' 也是 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$ 的和谐性质集，我们只证明 (C1)，(C2) 而把 (C3) — (C7) 留给读者自己验证。

(C1) 任取 $p\in P$，$p\cup\Gamma\in P'$，设 φ 是 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$ 中任一句子，如果 φ，$\neg\varphi\in p\cup\Gamma$，由 $p\in P$，P 是和谐性质集知，φ，$\neg\varphi$ 不能同属于 p，设 $\varphi\in p$，$\neg\varphi\in\Gamma$，由题设，$p\cup\{\neg\varphi\}\in P$，这与 P 是和谐性质集满足性质 (C1) 矛盾。设 $\neg\varphi\in p$，$\varphi\in\Gamma$ 同样不可能，设 φ，$\neg\varphi$ 都属于 Γ，则 $p\cup\{\varphi\}\in P$，进而有 $p\cup\{\varphi\}\cup\{\neg\varphi\}\in P$. 又与 P 是和谐性质集矛盾，这样 φ，$\neg\varphi$ 不能同属于 $p\cup\Gamma$ 之中，因此 P' 满足 (C1).

(C2) 设 $\neg\varphi\in p\cup\Gamma$，如果 $\neg\varphi\in p$，由 $p\in P$ 及 P 满足 (C2) 知 $p\cup\{\varphi^*\}\in P$，因此 $p\cup\{\varphi^*\}\cup\Gamma\in P'$，这就是 $p\cup\Gamma\cup\{\varphi^*\}\in P'$，如果 $\neg\varphi\in\Gamma$，则 $p\cup\{\neg\varphi\}\in P$，由 P 满足 (C2) 有 $p\cup\{\neg\varphi\}\cup\{\varphi^*\}\in P$，这样有 $p\cup\{\neg\varphi\}\cup\{\varphi^*\}\cup\Gamma\in P'$，而这就是 $p\cup\Gamma\cup\{\varphi^*\}\in P'$，所以 P' 满足 (C2). ▌

我们用模型存在定理来证明 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的完全性定理之前先来证明下面这个引理。

引理 13.1.3 设 $\mathscr{L}$ 是可数语言，C 是可数新常量集，$\mathscr{L}'=\mathscr{L}\cup C$，设 φ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的一个句子，则 $\vdash_{\mathscr{L}_{\omega_1\omega}}\varphi$ 当且仅当 $\vdash_{\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}}\varphi$.

证明 由于 φ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 中句子，$\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的公理都是 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$ 的公理，$\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的从公理出发的证明也是 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$ 的证明，因此由 $\vdash_{\mathscr{L}_{\omega_1\omega}}\varphi$ 到 $\vdash_{\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}}\varphi$ 的方向是显然的。现在设 $\vdash_{\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}}\varphi$，即存在从 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$ 的公理出发的一个证明 φ_0，φ_1，φ_2，…，φ_n，…，$\varphi_\omega=\varphi$，由于 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 中有势为 ω_1 的个体变元而证明序列 φ_n 只有可数多个公式，每个公式至多可数多个变元，因此我们可以用不在序列中出现的个体变元去代换序列中出现的 C 中新常量得到 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 中的公式序列 φ_0'，φ_1'，φ_2'，…，φ_n'，…，$\varphi_\omega'=\varphi$. 对每个 n，如果 φ_n 是 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$ 的一条公理，则 φ_n' 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的一条公理，如果 φ_n 是由它前面的公式经推演规则得到，则 ϕ'_n 也是. 这样 ϕ'_n 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的一个证明. 由于 φ_ω 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的句子，所以 $\phi'_\omega=\varphi_\omega=\varphi$，这样就得到 $\vdash_{\mathscr{L}_{\omega_1\omega}}\varphi$. ▌

定理 13.1.4 （**$\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的完全性定理**） 设 φ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 中一个句子，如果 $\models\varphi$，则 $\vdash_{\mathscr{L}_{\omega_1\omega}}\varphi$.

证明 令 C 是可数多个新常量符号组成的集合 $\mathscr{L}'=\mathscr{L}\cup C$，设 p 是 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$ 中满足下列条件的句子集。

(1) p 有限.

(2) p 中只出现有限多个 C 中新常量符号.

(3) $\nvdash_{\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}}\neg\bigwedge p$.

令 P 是一切满足上述条件的句子集 p 组成的集合，我们来证明 P 是 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$ 的和谐性质集. 我们记 $\vdash_{\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}}\psi$ 为 $\vdash'\psi$.

(C1) 设 ψ 是 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$ 的任何一个句子，如果 $\psi, \neg\psi$ 都是 p 中句子，由命题演算可得 $\vdash \neg\bigwedge p$. 因此 $p \notin P$，这样 P 满足 (C1).

(C2) 设 ψ 是 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$ 的任何一个句子，$\neg\psi \in p \in P$，如果 $p\cup\{\psi^*\} \notin P$，由 $p\cup\{\psi^*\}$ 满足 (1)、(2) 必有 $\vdash \neg(\bigwedge p \wedge \psi^*)$. 由 $\vdash' \neg\psi \leftrightarrow \psi^*$ 是 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$ 的公理. 用命题演算的等价代换可得 $\vdash' \neg(\bigwedge p \wedge (\neg\psi))$(见练习 13.1.4)，于是有 $\vdash' \neg\bigwedge p \vee \neg\neg\psi$，即 $\vdash' \bigwedge p \to \neg\neg\psi$，由 $\neg\psi \in p$，由 $Ax7$ $\vdash' \bigwedge p \to \neg\psi$，而 $\vdash' (\bigwedge p \to \neg\psi) \to (\bigwedge p \to \neg\neg\psi) \to \neg\bigwedge p)$ 是命题演算形式定理. 这样用两次分离法则就可得 $\vdash' \neg\bigwedge p$，与 $p \in P$ 矛盾，(C2)成立.

(C3) 设 Φ 是 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$ 的可数句子集，$\bigwedge\Phi \in p \in P$，设有 $\psi \in \Phi$，$p\cup\{\psi\} \notin P$，由 $p\cup\{\psi\}$ 满足 (1)、(2) 必有 $\vdash' \neg(\bigwedge p \wedge \psi)$，即 $\vdash' \bigwedge p \to \neg\psi$。但 $\vdash' \bigwedge p \to \bigwedge\Phi$，$\vdash' \bigwedge\Phi \to \psi$ 都是 $Ax7$ 的公理，由 HS 有 $\vdash' \bigwedge p \to \psi$. 从而又有 $\vdash' \neg\bigwedge p$，与 $p \in P$ 矛盾。因此有 (C3) 成立。

(C4) 设 $\bigvee\Phi \in p \in P$，但对任意 $\psi \in \Phi$，$p\cup\{\psi\} \notin P$，则 $\vdash' \neg(\bigwedge p \wedge \psi)$，$\vdash' \bigwedge p \to \neg\psi$，由归纳法则有 $\vdash' \bigwedge p \to \bigwedge_{\psi\in\Phi} \neg\psi$. 而由 $Ax6$ 及 $\bigwedge_{\psi\in\Phi} \neg\psi = (\bigvee\Phi)^*$ 有 $\vdash' \bigwedge p \to \neg\bigvee\Phi$。再由 $\bigvee\Phi \in p$ 又可得 $\vdash' \bigwedge p \to \bigvee\Phi$，从而 $\vdash' \neg\bigwedge p$ 与 $p \in P$ 矛盾，因此 (C4) 成立。

(C5) 设 $\forall x\psi(x) \in p \in P$. 而对某个 $c \in C$，$p\cup\{\psi(c)\} \notin P$ 则 $\vdash' \bigwedge p \to \neg\psi(c)$. 但 $\vdash' \neg\psi(c) \to \neg\forall x\psi(x)$ 是一阶逻辑形式定理，因此 $\vdash' \bigwedge p \to \neg\forall x\psi(x)$，再由于 $\vdash' \bigwedge p \to \forall x\psi(x)$，又得 $\vdash' \neg\bigwedge p$，与 $p \in P$ 矛盾。这样对每个 $c \in C$，$p\cup\{\psi(c)\} \in P$. (C5) 成立.

(C6) 设 $\exists x\psi(x) \in p \in P$. 而对任意 $c \in C$. $p\cup\{\psi(c)\} \notin P$，$\vdash' \bigwedge p \to \neg\psi(c)$，由于 p 中至多只有有限个 C 中常量，因此有不在 p 中出现的常量 $c \in C$，$\vdash' \bigwedge p \to \neg\psi(c)$. 用一阶逻辑的命题 2.2.2 的方法可证 $\vdash' \bigwedge p \to \forall x \neg\psi(x)$，而 $\forall x \neg\psi(x)$ 是

$(\exists x\psi(x))^*$，由 $Ax6$ 有$\vdash'\wedge p\to\neg\exists x\psi(x)$，再由
$\vdash'\wedge p\to\exists x\psi(x)$，可知有$\vdash'\neg\wedge p$与$p\in P$矛盾. 这样必存在 $c\in C$，使$p\cup\{\psi(c)\}\in P$，即（C6）成立.

（C7）1. 设c，$d\in C$，$c\equiv d\in p\in P$. 而$p\cup\{d\equiv c\}\notin P$，则$\vdash'\wedge p\to\neg d\equiv c$，而$\vdash' d\equiv c\to c\equiv d$是一阶逻辑形式定理，因此$\vdash'\wedge p\to\neg c\equiv d$，但$\vdash'\wedge p\to c\equiv d$，这样有$\vdash'\neg\wedge p$与$p\in P$矛盾. 因此（C7）1 成立。

2. 设$t\equiv c$，$\varphi(t)\in p\in P$. t是$\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$的任一闭项，$c\in C$，如果$p\cup\{\varphi(c)\}\notin P$，则$\vdash'\wedge p\to\neg\varphi(c)$. $\vdash'\wedge p\to(t\equiv c)\wedge\varphi(t)$，$\vdash' t\equiv c\wedge\varphi(t)\to\varphi(c)$是$\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$的形式定理（见练习 13.1.2)，因此$\vdash'\wedge p\to\varphi(c)$，这样必有$\vdash'\neg\wedge p$与$p\in P$矛盾.（C7）2 成立。

3. 设t是$\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$的任一闭项. 而对任意$c\in C$，$p\cup\{t\equiv c\}\notin P$，则$\vdash'\wedge p\to\neg(t\equiv c)$，取一个不在$p$中出现的常量$c\in C$，由命题 2.2.2 方法，也有$\vdash'\wedge p\to\forall x\neg(t\equiv x)$，易见有
$\vdash'\wedge p\to\neg\exists x(t\equiv x)$，而$\vdash'\exists x(t\equiv x)$是一阶逻辑形式定理，见 §2.2 例 4，因此有$\vdash'\wedge p\to\exists x(t\equiv x)$，这样必有$\vdash'\neg\wedge p$，从而$p\notin P$，因此（C7）3 成立。

至此，P是$\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$的和谐性质集. 设$\varphi$是$\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$中任何一句子，如果$\nvdash'\varphi$则$\nvdash\neg\neg\varphi$，因此$p=\{\neg\varphi\}\in P$，由模型存在定理，有$\mathscr{L}$的模型$\mathscr{U}\models p$. 即$\mathscr{U}\models\neg\varphi$，则$\mathscr{U}\nvDash\varphi$. 这样如果$\models\varphi$，一定有$\vdash'\varphi$即$\vdash_{\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}}\varphi$，由引理 13.1.3 有$\vdash_{\mathscr{L}_{\omega_1\omega}}\varphi$. ▌

我们看到完全性定理是模型存在定理的推论. 下面应用模型存在定理证明$\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的**降 L—S—T 定理**。

定理 13.1.5 设Φ是$\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的可数句子集，如果$\Phi$有模型，则$\Phi$有至多可数的模型.

证明 令P是$\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$中满足下列条件的句子集$p$组成的集合：(i)$p$至多可数；(ii)$p$有模型；(iii)$p$至多有$C$中可数多个新常

量符号。

不难证明 P 是 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$的和谐性质集. Φ 满足条件(i)(ii)(iii)，因此 $\Phi\in P$，由模型存在定理，Φ 有模型 $\mathscr{U}$，$\mathscr{U}$ 的论域中每个元素都是 C 中常量的解释，由 C 是可数集知 $\mathscr{U}$ 至多可数。 ▎

练习

13.1.1　证明命题 2.2.2 对 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$也成立。

13.1.2　证明 $\vdash_{\mathscr{L}_{\omega_1\omega}} t\equiv c\wedge\varphi(t)\rightarrow\varphi(c)$.

13.1.3　设 C 是可数新常量符号集，$\mathscr{L}'=\mathscr{L}\cup C$，设 φ_0，φ_1，…，φ_β，…，φ是 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$中句子序列组成的一个证明，以 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$中不在序列中出现的个体变元代换序列中出现的 C 中常量符号得到 φ_0'，φ_1'，…，φ_β'，…φ'. 证明这也是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$中的一个证明.

13.1.4　设 φ、ψ_1 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的公式，$\psi$ 是 φ 的一个子公式，$\vdash_{\mathscr{L}_{\omega_1\omega}}\psi\leftrightarrow\psi_1$，以 ψ_1 代换 φ 中若干处子公式 ψ 得到 φ'，证明 $\vdash_{\mathscr{L}_{\omega_1\omega}}\varphi\leftrightarrow\varphi'$.

13.1.5　证明演绎定理及假言三段论在 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$中成立.

§13.2　$\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$语言的可数片断

我们知道，如果 $\mathscr{L}$ 可数，一阶逻辑 $\mathscr{L}$ 的全体公式的势 $\|\mathscr{L}\|$ 也是一个可数基数，但是，对于无穷长逻辑，即使 $\mathscr{L}$ 可数，$\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$有不可数多个公式. 这是因为 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$有无穷长的公式，而可数无限集合可以有不可数多个可数无限的子集。我们也知道，讨论不可数公式集的语义性质比讨论可数公式集的要复杂得多。为了便于研究 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$逻辑的语义性质，我们有必要把讨论限制于 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的可数公式集. 而对于 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的任何一个和谐的可数公式集 T，由于 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的推理规则只涉及到可数多个公式，我们可以限制到 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的一个

可数片断，使这个可数片断中既包含已知的可数公式集 T，也包含与之相关的全体公式，从而只要在这个片断中讨论 T 的性质，就可以得到 T 在 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 中的性质. 为了得到这个可数片断，我们要用到集合论的方法。

集合论中常以空集 $\varnothing$ 表示自然数 0，以只含空集作为唯一一个元素的集合 $\{\varnothing\}$ 表示自然数 1，以 $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ 表示 2 等等，并归纳地定义 $n+1=n\cup\{n\}$，这样每个自然数 n 都是一个 n 个元素的集合，事实上，$n=\{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$. 以 ω 记全体这样定义的自然数的集合，还可以继续归纳定义 $\omega+1=\omega\cup\{\omega\}$，…. 令极限序数 $\alpha=\{\beta: \beta<\alpha\}$，令每个序数的后继序数 $\beta^+=\beta\cup\{\beta\}$. 全体可数序数有不可数多个。

设 a，b 是两个集合，令 $(a,b)=\{\{a\}, \{a,b\}\}$，称 (a, b) 为集合 a，b 的一个**序对**。容易证明 $(a, b)=(c, d)$ 当且仅当 $a=c$，$b=d$. 归纳地定义 n 元序对 $(a_1, \cdots, a_n)=((a_1, \cdots, a_{n-1}), a_n)$，同样可以证明 $(a_1, \cdots, a_n)=(b_1, \cdots, b_n)$ 当且仅当 $a_1=b_1$，…，$a_n=b_n$.

一个集合 A 称为有传递性，或称 A 为**可传集**，如果对任意 a，b，如果 $a\in b\in A$，则 $a\in A$. 设 a 是一个集合，a 的**传递闭包** $\mathrm{Tc}(a)$ 是包含 a 为其子集的最小可传集. 不难证明对任意集合 a，$\mathrm{Tc}(a)$ 总是存在的，事实上，令 $A_1=a$，…，$A_{n+1}=A_n\cup(\bigcup A_n)$，…，可以证明 $\mathrm{Tc}(a)=\bigcup\limits_{n<\omega} A_n$.

现在我们来对形式语言 $\mathscr{L}$ 中的原始符号进行编码，列出这些符号如下：

R	F	c	v	$\equiv$	)	(	$\forall$	$\exists$	$\wedge$	$\vee$	$\neg$
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

用符号下面列出的序数作为这个符号的编码，再用这些编码或编码的序对表示 $\mathscr{L}$ 的符号，令 $R_i=\langle 0, i\rangle$，$F_j=\langle 1, j\rangle$，$c_k=\langle 2, k\rangle$，$v_\alpha=\langle 3, \alpha\rangle$. 现在我们可以用**多元序对**表示 $\mathscr{L}$ 的符号串，

例如$\forall v_0 R_1(v_0)$. 可以表示为〈7，3，0，1，6，3，0，5〉。容易看出这种表示是一一的；即每个符号串可以唯一的对应一个多元序对，不同的符号串对应不同的多元序对，这样虽然多元序对不一定对应到 $\mathscr{L}$ 的公式，$\mathscr{L}$ 的每个公式却对应到一个多元序对. 设 Φ 是可数多个公式的集合，Φ 的每个公式已经对应到序数的序对。还用 Φ 表示这些序对组成的集合. 令〈$\vee$，Φ〉表示公式 $\vee\Phi$，〈$\wedge$，Φ〉表示公式 $\wedge\Phi$，这样不难看出，$\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的每个公式都可以用集合的序对表示出来，我们仍用 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$表示由序对给出的公式的全体. 设 $\mathscr{A}$ 是一个集合，以 $\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$ 表示 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}\cap\mathscr{A}$ 即 $\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$ 是 $\mathscr{A}$ 中代表 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的公式的集合组成的集合. 如果 $\mathscr{A}$ 满足下列条件，就称 $\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的一个**片断**：

（1）$\mathscr{A}$ 是非空可传集.

（2）如果 a，$b\in\mathscr{A}$，则 $\{a, b\}$，$a\cup b$，$a\times b$ 都属于 $\mathscr{A}$，其中 $a\times b=\{\langle c,d\rangle : c\in a,\ d\in b\}$

（3）若 $a\in\mathscr{A}$，α 是不在 $\mathrm{Tc}(a)$中出现的最小序数，则 $\alpha\in\mathscr{A}$.

（4）如果公式 $\varphi(x)\in\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$，$t\in\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的一个项，则 $\varphi(t)\in\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$.

命题 13.2.1 设 $\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的一个片断，则 $\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$ 有如下性质：

（1）$\omega\subset\mathscr{A}$，即每个自然数都是 $\mathscr{A}$ 的元素.

（2）$\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$ 对$\neg$，$\wedge$，$\vee$ 封闭，即如果公式 φ，$\psi\in\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$，则$\neg\varphi$，$\varphi\wedge\psi$，$\varphi\vee\psi\in\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$.

（3）若 $\varphi\in\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$，$x\in\mathscr{A}$，则$\forall x\varphi$，$\exists x\varphi\in\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$，这里 φ 是公式，x 是某个体变元。

（4）$\varphi\in\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$，则 $\mathrm{sub}\varphi\subset\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$.

（5）设 φ 是原子公式，x_1，…，$x_n\in\mathscr{A}$ 是个体变元，则 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)\in\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$.

（6）设 Φ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的可数公式集，$\Phi\in\mathscr{A}$，则 $\wedge\Phi$，$\vee\Phi$，

$\{\neg\varphi: \varphi\in\Phi\}$，$\{\exists x\varphi: \varphi\in\Phi, x\in\mathscr{A}\}$ 都是 $\mathscr{A}$ 的元素.

(7) 设 $\varphi\in\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$，则 $\varphi^{*}\in\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$.

(8) 设 $\varphi\in\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$，则存在个体变元 $x\in\mathscr{A}$，x 不在 φ 中出现.

证明 (1) 任取 $a\in\mathscr{A}$，由 $\mathscr{A}$ 是可传集知必有 $\mathrm{Tc}(a)\subset\mathscr{A}$. 若 $0\in\mathrm{Tc}(a)$，则 $0\in\mathscr{A}$. 如果 $0\notin\mathrm{Tc}(a)$，由 $\mathscr{A}$ 满足的性质(3)，有 $0\in\mathscr{A}$，设 n 是不属于 $\mathscr{A}$ 的最小自然数，则 $n-1\in\mathscr{A}$，由 $n-1$ 可传知，$n-1=\mathrm{Tc}(n-1)$，因此 $\mathrm{Tc}(n-1)\in\mathscr{A}$，这样又有 $n\in\mathscr{A}$，由此知所有自然数 $n\in\mathscr{A}$，因此 $\omega\subset\mathscr{A}$.

(2) 由 $\omega\subset\mathscr{A}$，$\neg$，$\wedge$，$\vee$ 的编码都是自然数知 $\neg$，$\wedge$，$\vee\in\mathscr{A}$，由 $\mathscr{A}$ 满足的性质 (2)，对任何 a，$b\in\mathscr{A}$，$\{a, b\}\in\mathscr{A}$，$\{a, a\}=\{a\}\in\mathscr{A}$，又有 $(a, b)=\{\{a\}, \{a, b\}\}\in\mathscr{A}$，对 a，b，$c\in\mathscr{A}$，同样有 $(a, b, c)\in\mathscr{A}$，这样如果 φ，$\psi\in\mathscr{A}$，则 $\langle\neg, \varphi\rangle$，$\langle\varphi, \wedge, \psi\rangle$，$\langle\varphi, \vee, \psi\rangle\in\mathscr{A}$，这就是 $\neg\varphi$，$\varphi\wedge\psi$，$\varphi\vee\psi\in\mathscr{A}$.

(3) 仿 (2) 可证.

(4) 设序对 $(a, b)\in\mathscr{A}$，即 $\{\{a\}, \{a, b\}\}\in\mathscr{A}$，由 $\mathscr{A}$ 有传递性知，$\{a\}$，$\{a, b\}\in\mathscr{A}$，a，$b\in\mathscr{A}$，这样对公式的复杂性归纳易证 $\varphi\in\mathscr{A}$ 时有 $\mathrm{sub}\varphi\subset\mathscr{A}$.

(5) 设 φ 是 $\mathscr{L}$ 的原子公式，由 $\mathscr{L}$ 中关系、函数及常量符号都对应到自然数的序对，因此 φ 是自然数的多元序对，这样由 $\omega\subset\mathscr{A}$ 及 $\mathscr{A}$ 的性质知 $\varphi\in\mathscr{A}$，易见对 x_1，…，$x_n\in\mathscr{A}$，有 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)\in\mathscr{A}$.

(6) 设 $\Phi\in\mathscr{A}$，显然有 $\langle\vee, \Phi\rangle$，$\langle\wedge, \Phi\rangle\in\mathscr{A}$，又由 $\Phi\in\mathscr{A}$，即 $\{\varphi: \varphi\in\Phi\}\in\mathscr{A}$，再由 $\neg\in\mathscr{A}$，有 $\{\neg\}\times\Phi=\{\langle\neg, \varphi\rangle: \varphi\in\Phi\}\in\mathscr{A}$，此即 $\{\neg\varphi: \varphi\in\Phi\}\in\mathscr{A}$，同样有 $\{\exists x\}\times\Phi=\{\exists x\varphi: \varphi\in\Phi, x\in\mathscr{A}\}\in\mathscr{A}$.

(7) 对 φ 的复杂性归纳易证 $\varphi^{*}\in\mathscr{A}$.

(8) 设 $\varphi\in\mathscr{A}$，则 $\mathrm{Tc}(\varphi)\subseteq\mathscr{A}$，设 v_{α} 在 φ 中出现，则 $\alpha\in\mathrm{Tc}(\varphi)$，

因而 $\alpha \in \mathscr{A}$，由 φ 中至多出现可数多个个体变元，而 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$中有不可数多个个体变元，因此有 v_β 不在 φ 中出现，这样有最小的 β，使 $\beta \notin \mathrm{Tc}(\varphi)$，由 $\mathscr{A}$ 的性质知 $\beta \in \mathscr{A}$，这样有 $v_\beta \in \mathscr{A}$，而 v_β 不在 φ 中出现。 ▌

命题 13.2.2 设 Φ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的可数公式集，则存在最小的可数片断 $\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$，使 $\Phi \subset \mathscr{L}_{\mathscr{A}}$.

证明 令 $\mathscr{A}_0 = \mathrm{Tc}(\Phi)$是 Φ 的可传闭包. 由 $\mathscr{A}_0$ 构造 $\mathscr{A}'_0$ 如下：

(i) 对一切 a，$b \in \mathscr{A}_0$，令 $\{a, b\}$，$a \cup b$，$a \times b \in \mathscr{A}'_0$.

(ii) 对一切 $a \in \mathscr{A}_0$，不属于 $\mathrm{Tc}(a)$的最小序数属于 $\mathscr{A}'_0$.

(iii) 对每个公式 $\varphi(x) \in \mathscr{A}_0$，及每个项 $t \in \mathscr{A}_0$，令 $\varphi(t) \in \mathscr{A}'_0$.

这样可以构造最小的 $\mathscr{A}'_0$，使 $\mathscr{A}_0 \subset \mathscr{A}'_0$，$\mathscr{A}'_0$ 满足 (i)、(ii)、(iii). 令 $\mathscr{A}_1 = \mathrm{Tc}(\mathscr{A}'_0)$

仿上面构造 $\mathscr{A}_2$，$\mathscr{A}_3$，…，令 $\mathscr{A} = \bigcup_{n<\omega} \mathscr{A}_n$，由 Φ 是可数集知，$\mathrm{Tc}(\Phi)$可数，因而 $\mathscr{A}_1$，$\mathscr{A}_2$，…都可数，于是 $\mathscr{A}$ 是可数集合，易见 $\mathscr{A}$ 满足性质 (1)，(2)，(3)，(4)，从而 $\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的可数片断。 ▌

下面给出的定理保证可数片断保持 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的主要性质。

定理 13.2.3 （**$\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$ 的完全性定理**） 设 $\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的可数片断，句子 $\varphi \in \mathscr{L}_{\mathscr{A}}$，则 $\underset{\mathscr{L}_{\mathscr{A}}}{\vdash} \varphi$ 当且仅当 $\models \varphi$. 这里 $\underset{\mathscr{L}_{\mathscr{A}}}{\vdash} \varphi$ 表示只用 $\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$ 中的公理，$\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$ 中有一个从公理出发到 φ 的形式证明。

证明 ($\Rightarrow$) 设 $\underset{\mathscr{L}_{\mathscr{A}}}{\vdash} \varphi$，则一定有 $\underset{\mathscr{L}_{\omega_1\omega}}{\vdash} \varphi$，由 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的完全性定理有$\models \varphi$。

($\Leftarrow$) 令 C 是可数新常量集，$\mathscr{L}' = \mathscr{L} \cup C$. 设 $\psi(x_1, \cdots, x_n, c_1, \cdots, c_m)$ 是 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$中的公式，$\psi$ 中自由变元只有有限多个，新常量也只有有限多个，任取一组个体变元

y_1，…，$y_m \in \mathscr{A}$，而 y_1，…，y_m 不在 ψ 中出现，如果都有
$\psi(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m) \in \mathscr{L}_{\mathscr{A}}$,则令
$\psi(x_1, \cdots, x_n, c_1, \cdots, c_m) \in \mathscr{L}'_{\mathscr{A}}$，否则
$\psi(x_1, \cdots, x_n, c_1, \cdots, c_m) \notin \mathscr{L}'_{\mathscr{A}}$。

由 $\mathscr{A}$ 是片断，可知以上定义与变元 y_1，…，y_m 的取法无关。由于 φ 中没有自由变元，也没有新常量，容易证明 $\vdash_{\mathscr{L}_{\mathscr{A}}} \varphi$ 当且仅当 $\vdash_{\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}} \varphi$.

设 P 是 $\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}$ 中一切满足下列性质的句子集 p 组成的集合，(1) p 有限，(2) $\nvdash_{\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}} \neg \wedge p$. 则 P 是 $\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}$ 的一个和谐性质集。

(C1) 设 φ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的一个句子，φ, $\neg\varphi$ 都属于 p，由 $p \in \mathscr{L}'_{\mathscr{A}}$，$\neg\varphi \in \mathscr{L}'_{\mathscr{A}}$，因此，$\vdash \wedge p \to \varphi$，$\vdash \wedge p \to \neg\varphi$ 都是 $\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}$ 中的公理. $\vdash (\wedge p \to \varphi) \to ((\wedge p \to \neg\varphi) \to \neg \wedge p)$ 是 $\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}$ 中的一个定理. 因此 $\vdash \neg \wedge p$ 也是 $\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}$ 中的定理，即 $\vdash_{\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}} \neg \wedge p$. 这与 (2) 矛盾. 因此 P 满足 (C1)。

(C2) 设 $\neg\varphi \in p$，而 $p \cup \{\varphi^*\} \notin P$，由 p 有限有 $p \cup \{\varphi^*\}$ 有限，因此 $\vdash_{\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}} \neg(\wedge p \wedge \varphi^*)$，因此有 $\vdash_{\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}} \neg \wedge p \vee \neg\varphi^*$，$\vdash_{\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}} \wedge p \to \neg\varphi^*$. 而由 $\neg\varphi \in p$，也有 $\vdash_{\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}} \wedge p \to \neg\varphi$，由 $\vdash \neg\varphi \to \varphi^*$ 是 $\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}$ 的一条公理，又有 $\vdash_{\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}} \wedge p \to \varphi^*$. 而 $\vdash_{\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}} (\wedge p \to \varphi^*) \to ((\wedge p \to \neg\varphi^*) \to \neg \wedge p)$，因此有 $\vdash_{\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}} \neg \wedge p$. 与 (2) 矛盾，这就得到 P 满足 (C2)。

(C3) 设 Φ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的可数公式集，$\wedge\Phi \in p$，设有某个 $\varphi \in \Phi$，使 $p \cup \{\varphi\} \notin P$，则 $\vdash_{\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}} \neg(\wedge p \wedge \varphi)$ 即 $\vdash_{\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}} \wedge p \to \neg\varphi$. 由 $\varphi \in \Phi \in p$ 及 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的一个片断，有 $\varphi \in \mathscr{L}'_{\mathscr{A}}$，$\vdash_{\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}} \wedge p \to \varphi$ 是 $\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}$ 中一条公理，仿上也有 $\vdash_{\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}} \neg \wedge p$ 与 (2) 矛盾. 因此 P 满足 (C3).

(C4) 如果 Φ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的可数公式集，$\vee\Phi \in p$，如果对每个

$\varphi\in\Phi$，都有$p\cup\{\varphi\}\notin P$，则 $\vdash_{\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}}\wedge p\to\neg\varphi$。由$\Phi\in p$，有$\Phi\in\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}$，由命题 13.2.1.(6)$\{\neg\varphi:\ \varphi\in\Phi\}\in\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}$，因此$\wedge\{\neg\varphi:\ \varphi\in\Phi\}\in\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}$ 即$(\vee\Phi)^{*}\in\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}$. 由 $\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}$ 的归纳法则有$\vdash_{\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}}\wedge p\to\wedge\{\neg\varphi:\ \varphi\in\Phi\}$. 即$\vdash_{\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}}\wedge p\to(\vee\Phi)^{*}$，但由$\vee\Phi\in p$，有$\vdash_{\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}}\wedge p\to\vee\Phi$，又可得$\vdash_{\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}}\neg\wedge p$与（2）矛盾. 这样 P 满足（C4）.

（C5）设$\forall x\varphi(x)\in p$，而对某个$c\in C$，$p\cup\{\varphi(c)\}\notin P$. 由于$\forall x\varphi(x)\in p$，$\forall x\varphi(x)\in\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}$，由 $\mathscr{A}$ 是片断知 $\varphi(x)\in\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}$，由 $\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}$ 的定义，$\varphi(c)\in\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}$，这样必有$\vdash_{\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}}\wedge p\to\neg\varphi(c)$. 而由$\forall x\varphi(x)\in p$，$\vdash_{\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}}\wedge p\to\forall x\varphi(x)$，$\vdash_{\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}}\forall x\varphi(x)\to\varphi(c)$是 $\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}$ 的公理而有$\vdash_{\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}}\wedge p\to\varphi(c)$. 这样又有$\vdash_{\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}}\neg\wedge p$ 与（2）矛盾. 因此 P 满足（C5）.

（C6）设$\exists x\varphi(x)\in p$. 而对每个$c\in C$ 有

$p\cup\{\varphi(c)\}\notin P$。取$c$，$x\in\mathscr{A}$，而不在$\varphi$中出现，由命题 13.2.1（8）这样的 x 存在. 由 $\mathscr{A}$ 是片断，$\varphi(x)\in\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}$，$\varphi(c)\in\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}$. 这样$\vdash_{\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}}\wedge p\to\neg\varphi(c)$. 由 c 不在$\wedge p$ 中出现，可以在 $\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}$ 中证明有$\vdash_{\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}}\wedge p\to\forall x\neg\varphi(x)$即$\vdash_{\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}}\wedge p\to\neg\exists x\varphi(x)$. 而由$\exists x\varphi(x)\in p$，有$\vdash_{\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}}\wedge p\to\exists x\varphi(x)$，这样可得$\vdash_{\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}}\neg\wedge p$ 与（2）矛盾. 因此 P 满足（C6）.

（C7）1. 设c，$d\in C$，$c\equiv d\in p$，容易证明 $d\equiv c$ 也是 $\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}$ 的公式，也有 $p\cup\{d\equiv c\}\in P$.

2. 设 t 是一个闭项，$t\equiv c$，$\varphi\equiv c$，$\varphi(t)\in p$ 而 $p\cup\{\varphi(c)\}\notin P$. 由 t 是闭项，及$\varphi(t)\in p$，$\varphi(t)\in\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$，可以证明必有 $\varphi(x)\in\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$，因此有 $\varphi(c)\in\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}$，这样$\vdash_{\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}}\wedge p\to\neg\varphi(c)$，但仿练习 13.1.2 有$\vdash_{\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}}\wedge p\to(t\equiv c\wedge\varphi(t))$，$\vdash_{\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}}(t\equiv c\wedge\varphi(t))\to\varphi(c)$，因此有

$\vdash_{\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}} \wedge p \to \varphi(c)$，于是又有$\vdash_{\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}} \neg \wedge p$ 与 (2) 矛盾。

3. 设 t 是 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$ 的任一闭项，而对任意一个 $c \in C$，$p \cup \{t \equiv c\} \notin P$. 而由命题 13.2.1 (5) 原子公式 $x_1 \equiv x_2 \in \mathscr{A}$，因此有$t \equiv x_2 \in \mathscr{A}$，于是 $t \equiv c \in \mathscr{L}'_{\mathscr{A}}$，这样$\vdash_{\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}} \neg \wedge p \to \neg t \equiv c$。由 p 有限，p 中每个句子中出现的新常量也有限，因此有不在 p 中出现的新常量$c \in C$，使$\vdash_{\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}} \wedge p \to \neg t \equiv c$. 这样可证明$\vdash_{\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}} \wedge p \to \forall x \neg t \equiv x$，即$\vdash_{\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}} \wedge p \to \neg \exists x(t \equiv x)$，但$t \equiv x \in \mathscr{L}'_{\mathscr{A}}$，因此$\vdash_{\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}} \exists x(t \equiv x)$，也有$\vdash_{\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}} \wedge p \to \exists x(t \equiv x)$，这样又可证$\vdash_{\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}} \neg \wedge p$ 与 (2) 矛盾. 于是 P 满足 (C7)。

由以上证明知 P 是 $\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}$ 中一个和谐性质集当然也是$\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$的一个和谐性质集。

如果$\nvdash_{\mathscr{L}_{\mathscr{A}}} \varphi$，则必有$\nvdash_{\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}} \neg(\neg\varphi)$，因此

$\{\neg\varphi\} \in P$，由模型存在定理知有模型 $\mathscr{U} \models \neg\varphi$. 这与$\models \varphi$矛盾！因此必有$\vdash_{\mathscr{L}_{\mathscr{A}}} \varphi$. ▌

现在我们可以在 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的一个可数片断中来讨论可数公式集的性质. 我们介绍可数片断 $\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$ 的模型论的简单性质。

定理 13.2.4 （**$\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$ 的省略型定理**） 设 $\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的一个可数片断，$T$ 是 $\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$ 的句子集. $\Phi(x_1, \cdots, x_n)$ 是 $\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$ 的一个可数公式集，Φ 中每个公式的自由变元都在 $x_1, \cdots, x_n$ 之中. 设

(i) T 有模型；

(ii) 对 $\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$ 中任何一个公式 $\psi(x_1, \cdots, x_n)$，如果 $T \cup \{\exists x_1 \cdots x_n \psi(x_1, \cdots, x_n)\}$ 有模型，则存在$\varphi(x_1, \cdots, x_n) \in \Phi$ 使$T \cup \{\exists x_1 \cdots x_n(\psi \wedge \varphi)\}$有模型. 则

$T \cup \{\forall x_1 \cdots x_n(\vee \Phi(x_1, \cdots, x_n))\}$ 有可数模型.

证明 令 C 是可数无限新常量符号的集合，如果公式 $\varphi(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n) \in \mathscr{L}_{\mathscr{A}}$，$c_1, \cdots, c_n \in C$，就令

$\varphi(x_1, \cdots, x_m\ c_1, \cdots, c_m) \in \mathscr{L}'_{\mathscr{A}}$，$\mathscr{L}' = \mathscr{L} \cup C$. 令 p 是 $\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}$ 中有限多个句子的集合，p 中出现的 C 中新常量只有有限多个，$p \cup T$ 有模型，取 $P = \{p \cup T \cup \{\bigvee \Phi(c_1, \cdots, c_n): c_1, \cdots, c_n \in C\}: p$ 具有上述性质$\}$，我们证明 P 是 $\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$ 的一个和谐性质集.

($C1$) 设 φ, $\neg\varphi$ 都属于 $p \cup T \cup \{\bigvee \Phi(c_1, \cdots, c_n): c_1, \cdots, c_n \in C\}$，由 $p \cup T$ 有模型，知 φ, $\neg\varphi$ 中至少有一个是 $\bigvee \Phi(c_1, \cdots, c_n)$，由于 $\bigvee \Phi(c_1, \cdots, c_n)$ 不是否定式，只能设 $\varphi = \bigvee \Phi(c_1, \cdots, c_n), c_1, \cdots, c_n \in C, \neg\varphi \in p \cup T$。则存在模型 $\mathscr{U} \models T$, $\mathscr{U} \models \neg\varphi$, 即 $\mathscr{U} \models \neg \bigvee \Phi\ (c_1, \cdots, c_n)$，因此，
$\mathscr{U} \models \exists x_1 \cdots x_n (\neg \bigvee \Phi\ (x_1, \cdots, x_n))$。令 $\psi = \neg \bigvee \Phi(x_1, \cdots, x_n)$，由题设有 $\sigma \in \Phi(x_1, \cdots, x_n)$ 使 $T \cup \{\exists x_1 \cdots x_n (\psi \wedge \sigma)\}$ 有模型。但不难看出 $(\neg \bigvee \Phi) \wedge \sigma$ 是不和谐公式集，不可能有模型. 因此 p 满足 ($C1$).

($C2$) 设 $\neg\varphi \in p \cup T \cup \{\bigvee \Phi(c_1, \cdots, c_n): c_1, \cdots, c_n \in C)\}$，则必有 $\neg\varphi \in p \cup T$，由 $p \cup T$ 有模型 $\mathscr{U}$，因此 $\mathscr{U} \models \neg\varphi$，这样 $\mathscr{U} \models \varphi^*$. 因此 $p \cup \{\varphi^*\} \cup T$ 有模型，这样 $p \cup \{\varphi^*\} \cup T \cup \{\bigvee \Phi(c_1, \cdots, c_n): c_1, \cdots, c_n \in C)\}$ 也是 P 的元素，这样 P 满足 ($C2$).

($C3$) 设 Ψ 是 $\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}$ 的一个可数公式集，$\bigwedge \Psi \in p \cup T \cup \{\bigvee \Phi(c_1, \cdots, c_n): c_1, \cdots, c_n \in C)\}$，则 $\bigwedge \Psi \in p \cup T$. 因此有模型 $\mathscr{U} \models p \cup T$, $\mathscr{U} \models \bigwedge \Psi$，对任何一个公式 $\psi \in \Psi$ 都有 $\mathscr{U} \models \psi$. 因此 $p \cup \{\psi\} \cup T$ 有模型. 于是 $p \cup \{\psi\} \cup T \cup \{\bigvee \Phi(c_1, \cdots, c_n): c_1, \cdots, c_n \in C)\} \in P$. 这样 P 满足 ($C3$).

($C4$) 设 $\bigvee \Psi \in p \cup T \cup \{\bigvee \Phi(c_1, \cdots, c_n): c_1, \cdots, c_n \in C)\}$。如果 $\bigvee \Psi \in p \cup T$，则由于有 $\mathscr{U} \models p \cup T$, $\mathscr{U} \models \bigvee \Psi$，存在 $\psi \in \Psi$，使 $\mathscr{U} \models \psi$，这样 $p \cup \{\psi\} \cup T$ 有模型，因此 $p \cup \{\psi\} \cup T \cup \{\bigvee \Phi(c_1, \cdots, c_n): c_1, \cdots, c_n \in C\} \in P$。如果 $\bigvee \Psi = \bigvee \Phi(c_1, \cdots, c_n)$, $c_1, \cdots, c_n \in C$，由 $p \cup T$ 有模型，p 有限，p 中只有有限多个 C 中新常量，可令 $\psi = \bigwedge p(c_1, \cdots, c_n, d_1, \cdots, d_m)$, $c_1, \cdots, c_n, d_1, \cdots, d_m$

$\in C$，则 $T\cup\{\exists x_1,\cdots,x_n(\exists y_1,\cdots,y_m(\wedge p(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)))\}$ 有模型．由题设存在 $\varphi\in\Phi$，使

$T\cup\{\exists x_1,\cdots,x_n(\exists y_1,\cdots,y_m(\wedge p(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m))\wedge\varphi(x_1,\cdots,x_n))\}$ 有模型．因此 $p\cup\{\varphi(c_1,\cdots,c_n)\}\cup T$ 有模型，由于 $\varphi(c_1,\cdots,c_n)\in\Psi$，$P$ 满足（C4）.

（C5）—（C7）留给读者作练习．

于是 P 是和谐性质集．取 $p=\varnothing$ 空集，则 $T\cup\{\vee\Phi(c_1,\cdots,c_n):c_1,\cdots,c_n\in C)\}\in P$，由模型存在定理知有可数模型 $\mathscr{U}\models T$，对任意 $c_1,\cdots,c_n\in C$，$\mathscr{U}\models\vee\Phi(c_1,\cdots,c_n)$，而 $\mathscr{U}$ 的论域中的每个元素都是 C 中常量的解释．这样 $\mathscr{U}\models\forall x_1,\cdots,x_n\vee\Phi(x_1,\cdots,x_n)$。因此 $T\cup\{\forall x_1,\cdots,x_n\vee\Phi(x_1,\cdots,x_n)\}$ 有可数模型． ▌

容易把以上定理推广到广义的省略型定理．

定理13.2.5 （**广义省略型定理**） 设 $\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的可数片断，T 是 $\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$ 的句子集，对每个 $n<\omega$，$\Phi_n(x_1,\cdots,x_{r_n})$ 是 $\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$ 的自由变元在 $x_1,\cdots,x_{r_n}$ 中的公式集，如果 T 有模型，且对每个 $n<\omega$ 及 $\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$ 中每个公式 $\psi(x_1,\cdots,x_{r_n})$，如果
$T\cup\{\exists x_1,\cdots,x_{r_n}\psi(x_1,\cdots,x_{r_n})\}$ 有模型，就存在 $\varphi\in\Phi_n$，使 $T\cup\{\exists x_1,\cdots,x_{r_n}(\psi\wedge\varphi)\}$ 有模型，则
$T\cup\{\bigwedge_{n<\omega}\forall x_1\cdots x_{r_n}\vee\Phi_n(x_1\cdots x_{r_n})\}$ 有可数模型。

证明 只要在定理13.2.4的证明中，令

$P=\{p\cup T\cup\{\vee\Phi_n(c_1,\cdots,c_{r_n}):n<\omega,c_1,\cdots,c_{r_n}\in C\}:p$ 有限，p 中只有有限多个 C 中常量符号，$p\cup T$ 有模型$\}$

同样可以证明 P 是 $\mathscr{L}'_{\mathscr{A}}$ 的和谐性质集。取 $p=\varnothing$，由 $(T\cup\{\vee\Phi_n(c_1,\cdots,c_{r_n}):n<\omega,c_1,\cdots,c_{r_n}\in C\})\in P$ 知有模型 $\mathscr{U}\models T$，对每个 $n<\omega$，任意 $c_1,\cdots,c_{r_n}\in C$，有
$\mathscr{U}\models\vee\Phi_n(c_1,\cdots,c_{r_n})$，由于 $\mathscr{U}$ 的论域中每个元素都是 C 中新常量符号的解释，因此对每个 $n<\omega$，

$\mathscr{U}\models\forall x_1,\cdots,x_{r_n}\bigvee\Phi_n(x_1,\cdots,x_{r_n})$，从而有

$\mathscr{U}\models\bigwedge_{n<\omega}\forall x_1,\cdots,x_{r_n}\bigvee\Phi_n(x_1,\cdots,x_{r_n})$. ∎

设 $\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的一个可数片断。$\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$ 的一个句子集 T 如果有模型，就称 T 是 $\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$ 的**和谐理论**，如果 T 是 $\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$ 的和谐理论，且对 $\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$ 的任何一个句子 φ 都有 $\varphi\in T$，或 $\neg\varphi\in T$，就称 T 是 $\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$ 的**完备理论**。设 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 是 $\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$ 的一个公式，对和谐理论 T，如果 $T\cup\{\exists x_1,\cdots,x_n\varphi(x_1,\cdots,x_n)\}$ 有模型，就称公式 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$与 T 和谐，设 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 是与 T 和谐的一个公式，如果对 $\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$ 中任何一个公式 $\psi(x_1,\cdots,x_n)$，都有

$$T\vdash\forall x_1\cdots x_n(\varphi(x_1\cdots x_n)\rightarrow\psi(x_1\cdots x_n))$$

或

$$T\vdash\forall x_1\cdots x_n(\varphi(x_1\cdots x_n)\rightarrow\neg\psi(x_1,\cdots,x_n))$$

成立，就称 $\varphi(x_1\cdots x_n)$是 T 的**完备公式**。

设 $\Phi(x_1,\cdots,x_n)$ 是 $\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$ 的一个公式集，Φ 中公式的自由变元都在 $x_1,\cdots,x_n$ 之中，如果 $T\cup\{\exists x_1\cdots x_n\bigwedge\Phi(x_1,\cdots,x_n)\}$有模型，并且对 $\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$ 中任意公式 $\psi(x_1,\cdots,x_n)$，或 $\psi\in\Phi$，或 $\neg\psi\in\Phi$，就称 Φ 是 T 的一个型。

引理13.2.6 设 T 是可数片断 $\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$ 的和谐理论，$\Phi_n(x_1,\cdots,x_{r_n})$，$n<\omega$，是 T 的可数多个型. 对每个 $n<\omega$，$\Phi_n(x_1,\cdots,x_{r_n})$ 中不包含 T 的任何完备公式，则 T 有一个可数模型省略每个 Φ_n.

证明 只要证明 $T\cup\{\bigwedge_{n<\omega}\forall x_1\cdots x_{r_n}\bigvee_{\varphi\in\Phi_n}\neg\varphi(x_1,\cdots,x_{r_n})\}$有模型. 对每个 $n<\omega$，任取 $\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$ 中公式 $\psi(x_1,\cdots,x_{r_n})$，设 $\psi(x_1,\cdots,x_{r_n})$ 与 T 和谐，设 $\psi\in\Phi_n$，由 Φ_n 中不含 T 的完备公式，知 ψ 不是 T 的完备公式. 因而存在 $\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$ 的一个公式 $\theta(x_1\cdots x_n)$使

(1) $T\nvdash\forall x_1\cdots x_{r_n}(\psi(x_1,\cdots,x_{r_n})\rightarrow\theta(x_1,\cdots,x_{r_n}))$,

(2) $T\nvdash\forall x_1\cdots x_{r_n}(\psi(x_1,\cdots,x_{r_n})\rightarrow\neg\theta(x_1,\cdots,x_{r_n}))$

都成立。

由（1）有 $T\cup\{\neg(\forall x_1\cdots x_{r_n}(\psi(x_1,\cdots,x_{r_n})\to\theta(x_1,\cdots,x_{r_n}))\}$ 有模型，而这就是 $T\cup\{\exists x_1\cdots x_{r_n}(\psi\wedge\neg\theta)\}$ 有模型，即 $\psi\wedge\neg\theta$ 与 T 和谐，由（2）有 $\psi\wedge\theta$ 与 T 和谐. 由 Φ_n 是型，可知有 θ 或 $\neg\theta\in\Phi_n$。设 $\psi\notin\Phi_n$，则有 $\neg\psi\in\Phi_n$，显然有 $\psi\wedge\neg\neg\psi$ 与 T 和谐. 这样只要 ψ 与 T 和谐，就总有一个公式 $\theta\in\Phi_n$，使 $\psi\wedge\neg\theta$ 与 T 和谐。由定理13. 2. 5 $T\cup\{\bigwedge_{n<\omega}\forall x_1\cdots x_{r_n}\bigvee_{\varphi\in\Phi_n}\neg\varphi\}$ 有可数模型，而这就是 T 有可数模型省略每个 Φ_n. ▌

设 $\psi(x_1,\cdots,x_n)$ 是 $\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$ 的一个公式，T 是 $\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$ 的一个和谐理论，如果 ψ 与 T 和谐且存在 T 的完备公式 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$，使 $T\vdash\forall x_1\cdots x_n(\varphi(x_1,\cdots,x_n)\to\psi(x_1,\cdots,x_n))$，就称 $\psi(x_1,\cdots,x_n)$ 是 T 的**可完备化的公式**，否则就称 $\psi(x_1,\cdots,x_n)$ 是 T 的不可完备化的公式。

引理13. 2. 7 设 T 是 $\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$ 的和谐理论，则 T 有一个可数模型 $\mathscr{U}$，对每个 $n<\omega$，A 中任意 n 元组 $a_1,\cdots,a_n$ 必存在一个公式 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$，φ 或是 T 的完备公式或是 T 的不可完备化的公式，使 $\mathscr{U}\models\varphi[a_1,\cdots,a_n]$.

证明 对每个 $n<\omega$，令 $\Phi_n(x_1,\cdots,x_n)$ 是以 $x_1,\cdots,x_n$ 为自由变元的公式 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 的集合，Φ_n 中每个公式 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 或是 T 的完备公式，或是 T 的不可完备化的公式. 设 $\psi(x_1,\cdots,x_n)$ 是 $\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$ 的一个公式，ψ 与 T 和谐，如果 ψ 不可完备化，则 $\psi\in\Phi_n$，$\psi\wedge\psi$ 与 T 和谐，如果 ψ 可完备化，则存在 T 的完备公式 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$，使

$$T\vdash\forall x_1\cdots x_n(\varphi(x_1,\cdots,x_n)\to\psi(x_1,\cdots,x_n))$$

这样 $T\nvdash\forall x_1\cdots x_n(\varphi(x_1,\cdots,x_n)\to\neg\psi(x_1,\cdots,x_n))$

因此 $T\cup\{\exists x_1\cdots x_n(\varphi\wedge\psi)\}$ 有模型，即 $\psi\wedge\varphi$ 与 T 和谐，由于 φ 是完备公式，必有 $\varphi\in\Phi_n$。由定理13. 2. 5，$T\cup\{\bigwedge_{n<\omega}\forall x_1\cdots x_n\bigvee\Phi_n$

$(x_1, \cdots, x_n)\}$有可数模型$\mathscr{U}$，$\mathscr{U} \models T$，对每个$n<\omega$，任意$a_1, \cdots, a_n \in A$有$\varphi(x_1, \cdots, x_n) \in \Phi_n$，使$\mathscr{U} \models \varphi[a_1, \cdots, a_n]$. 由$\Phi_n$的定义知$\varphi$或是$T$的完备公式，或是$T$的不可完备化的公式。 ▌

类似于一阶逻辑模型论，我们可以定义$\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$的**初等子模型**。设$\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$是$\mathscr{L}$的模型，$\mathscr{U} \subset \mathscr{B}$，如果对$\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$的每个公式$\varphi(x_1, \cdots, x_n)$，任意$a_1, \cdots, a_n \in A$，$\mathscr{U} \models \varphi[a_1, \cdots, a_n]$当且仅当$\mathscr{B} \models \varphi[a_1, \cdots, a_n]$，就称$\mathscr{U}$是$\mathscr{B}$的$\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$ **初等子模型**，记作$\mathscr{U} \underset{\mathscr{L}_{\mathscr{A}}}{\prec} \mathscr{B}$。

设T是$\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$的和谐理论，$\mathscr{L}$的模型$\mathscr{U} \models T$，如果对任意模型$\mathscr{B} \models T$，都有$\mathscr{U} \underset{\mathscr{L}_{\mathscr{A}}}{\prec} \mathscr{B}$，就称$\mathscr{U}$是$T$的**素模型**。

定理13.2.8 设T是$\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$的完备理论，则

(i) $\mathscr{U}$是T的素模型当且仅当$\mathscr{U}$至多可数，$\mathscr{U} \models T$，且对任意的$a_1, \cdots, a_n \in A$，存在T的完备公式$\varphi(x_1, \cdots, x_n)$，使$\mathscr{U} \models \varphi[a_1, \cdots, a_n]$；

(ii) T的任意二个素模型同构；

(iii) T有素模型当且仅当$\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$中不存在与$T$和谐的$T$的不可完备的公式。

证明 (i) ($\Rightarrow$) 由T和谐及降L—S—T定理，T一定有可数模型，由于$\mathscr{U}$是T的素模型，则$\mathscr{U}$至多可数。设$a_1, \cdots, a_n \in A$，$\Phi(x_1, \cdots, x_n)$是$a_1, \cdots, a_n$实现的型，即$\Phi(x_1, \cdots, x_n) = \{\varphi(x_1, \cdots, x_n) : \mathscr{U} \models \varphi[a_1, \cdots, a_n]\}$。如果$\Phi$不含$T$的完备公式，由引理13.2.6$T$有模型$\mathscr{B}$省略$\Phi(x_1, \cdots, x_n)$，但这时必有$f: \mathscr{U} \underset{\mathscr{L}_{\mathscr{A}}}{\prec} \mathscr{B}$，从而$fa_1, \cdots, fa_n \in B$，$fa_1, \cdots, fa_n$实现$\Phi$，得到矛盾，这样$\Phi(x_1, \cdots, x_n)$中必有$T$的完备公式。

($\Leftarrow$) 设$\mathscr{U} \models T$，$\mathscr{U}$可数，且对任意$a_1, \cdots, a_n \in A$，都有T的完备公式$\varphi(x_1, \cdots, x_n)$，$\mathscr{U} \models \varphi[a_1, \cdots, a_n]$，列出$A$的全体元素$a_1, a_2, \cdots$，对每个$n<\omega$，令$\varphi_n(x_1, \cdots, x_n)$是$T$的完备公

式，$\mathscr{U}\models\varphi_n[a_1, \cdots, a_n]$。任取 T 的一个模型 $\mathscr{B}$，由于 $\varphi_1(x_1)$ 是 T 的完备公式，则 $T\cup\{\exists x_1\varphi_1(x_1)\}$ 有模型，由 T 完备，必有 $\exists x_1\varphi_1(x_1)\in T$，因此 $\mathscr{B}\models\exists x_1\varphi_1(x_1)$，从而存在 $b_1\in B$，使 $\mathscr{B}\models\varphi_1[b_1]$。归纳假设已经有 $b_1, \cdots, b_n\in B$，使 $\mathscr{B}\models\varphi_n[b_1, \cdots, b_n]$。我们证明必有 $b_{n+1}\in B$，使 $\mathscr{B}\models\varphi_{n+1}[b_1, \cdots, b_{n+1}]$。由于 $\mathscr{U}\models\varphi_{n+1}[a_1, \cdots, a_{n+1}]$，有 $\mathscr{U}\models\exists x_{n+1}\varphi_{n+1}[a_1, \cdots, a_n]$，于是 $\mathscr{U}\models\varphi_n[a_1, \cdots, a_n]\rightarrow\exists x_{n+1}\varphi_{n+1}[a_1, \cdots, a_n]$. 由于 φ_n 是 T 的完备公式，因此必有 $T\vdash\forall x_1\cdots x_n(\varphi_n\rightarrow\exists x_{n+1}\varphi_{n+1})$，这样又有 $\mathscr{B}\models\varphi_n[b_1, \cdots, b_n]\rightarrow\exists x_{n+1}\varphi_{n+1}(b_1, \cdots, b_n)$，从而 $\mathscr{B}\models\exists x_{n+1}\varphi_{n+1}[b_1, \cdots, b_n]$，因此有 $b_{n+1}\in B$，使 $\mathscr{B}\models\varphi_{n+1}[b_1,\cdots,b_{n+1}]$，这样我们归纳证明了存在 B 的可数无限子集 $b_1, b_2, \cdots$，对每个 $n<\omega$，$\mathscr{B}\models\varphi_n[b_1, \cdots, b_n]$.

令 f: $A\rightarrow B$、$f(a_n)=b_n$，则 f 是 A 到 B 内的一个映射。我们来证明 f 是 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{B}$ 内的初等嵌入，设 $\psi(x_1, \cdots, x_n)$ 是 $\mathscr{L}_\mathscr{A}$ 的任一公式. $\mathscr{U}\models\psi[a_1, \cdots, a_n]$，由此可得

$T\vdash\forall x_1\cdots x_n(\varphi_n(x_1, \cdots, x_n)\rightarrow\psi(x_1,\cdots,x_n))$。从而有 $\mathscr{B}\models\psi[b_1, \cdots, b_n]$，即 $\mathscr{B}\models\psi[fa_1, \cdots, fa_n]$，因此 $\mathscr{U}\underset{\mathscr{L}_\mathscr{A}}{\preccurlyeq}\mathscr{B}$.

(ii) 设 $\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 是 T 的两个素模型，由 (i)，$\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$ 可数，可以列出 A，B 的全部元素

$a_1, a_2, a_3, \cdots, b_1, b_2, b_3, \cdots$

用过来过去法可以建立 A，B 的两个重排。

$a_1', a_2', a_3', \cdots; b_1', b_2', b_3', \cdots$

使对任意 $n<\omega$，有 T 的完备公式 $\varphi_n(x_1, \cdots, x_n)$，$\mathscr{U}\models\varphi_n[a_1', \cdots, a_n']$ 且 $\mathscr{B}\models\varphi_n[b_1', \cdots, b_n']$.

令 f: $A\rightarrow B$，$f(a_n')=b_n'$，则 f 是 A 到 B 的一个满射，容易证明对 $\mathscr{L}_\mathscr{A}$ 的任意公式 $\psi(x_1, \cdots, x_n)$，$\mathscr{U}\models\psi[a_1', \cdots, a_n']$ 当且仅当 $\mathscr{B}\models\psi[b_1',\cdots,b_n']$。特别对 $\mathscr{L}$ 的公式这个结果当然也是成立的，

因此$\mathscr{U}\cong\mathscr{B}$.

(iii) ($\Rightarrow$) 设T有一个不可完备化的公式$\varphi(x_1, \cdots, x_n)$，且$\varphi$与$T$和谐，由$T$是完备理论有$T\models\exists x_1,\cdots x_n\varphi(x_1\cdots x_n)$. 这样对$T$的任何一个模型$\mathscr{U}$，都有$a_1, \cdots, a_n\in A$，使$\mathscr{U}\models\varphi[a_1,\cdots,a_n]$. 我们断定$a_1, \cdots, a_n$不能满足$T$的任何一个完备公式，否则$\varphi$就可以完备化，由已证的 (i) 知$\mathscr{U}$不是$T$的素模型，从而$T$没有素模型。

($\Leftarrow$) 设T没有与之和谐的不可完备化的公式，由引理13.2.7，T有一个可数模型$\mathscr{U}$，对每个$n<\omega$，每个$a_1, \cdots, a_n\in A, a_1, \cdots, a_n$都满足一个$T$的完备公式，再由 (i) 知$\mathscr{U}$是$T$的素模型。 ▍

推论13.2.9 设T是$\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$的完备理论，对每个$n<\omega$，$T$至多有可数多个型$\Phi(x_1, \cdots, x_n)$，则$T$有素模型。

证明 由定理13.2.8 (iii) 只要证明$\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$中没有与$T$和谐的$T$的不可完备化的公式，$T$就有素模型。设$n<\omega$，$\psi(x_1, \cdots, x_n)$是与$T$和谐的$T$的不可完备化的公式。记$i\in I$，$\Phi_i(x_1, \cdots, x_n)$是$T$的一切包含公式$\psi(x_1, \cdots, x_n)$的型，由题设知$I$至多可数。可以断定对每个$i\in I$，$\Phi_i$中不含$T$的任何完备公式，否则若有$i\in I$，$\Phi_i$中有$T$的完备公式$\varphi(x_1, \cdots, x_n)$，则

$T\cup\{\exists x_1\cdots x_n(\varphi(x_1,\cdots,x_n)\wedge\psi(x_1,\cdots x_n))\}$有模型，因此

$T\nvdash\forall x_1\cdots x_n(\varphi(x_1\cdots x_n)\rightarrow\neg\psi(x_1,\cdots x_n))$，由于$\varphi(x_1,\cdots,x_n)$是$T$的完备公式，一定有

$$T\vdash\forall x_1\cdots x_n(\varphi(x_1, \cdots, x_n)\rightarrow\psi(x_1, \cdots, x_n))$$

成立，从而ψ是T的可完备化的公式，得到矛盾。现在由引理13.2.6，T有一个可数模型$\mathscr{U}$省略每个Φ_i，但$\psi(x_1, \cdots, x_n)$与T和谐，因此有$T\models\exists x_1\cdots x_n\psi(x_1, \cdots, x_n)$，由$T$完备，$\exists x_1\cdots x_n\psi(x_1,\cdots,x_n)$是$T$中一个公式，因此存在$a_1, \cdots, a_n\in A$，使$\mathscr{U}\models\psi[a_1, \cdots, a_n]$。

以 $\Psi(x_1, \cdots, x_n)$ 记被模型 $\mathscr{U}$ 的元素 $a_1, \cdots, a_n$ 实现的型. 但由 $\psi(x_1, \cdots, x_n) \in \Psi$ 知必有某 $i \in I$, 使 $\Psi = \Phi_i$, $\mathscr{U}$ 实现 Ψ, 省略 Φ_i 是个矛盾!这样 T 没有与之和谐的不可完备化的公式。 ▌

关于素模型的完备理论的这个特征与一阶逻辑中相应的结论是一致的。和谐理论 T 如果在同构的意义下只有一个可数模型就称 T 是 ω-范畴的理论。$\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$中有一个句子可以给出 ω-范畴理论的特征。

定理13.2.10 设 T 是 $\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$ 的完备理论, 则 T 是 ω-范畴理论当且仅当 $T \models \bigwedge_{n<\omega} \forall x_1 \cdots x_n \bigvee \{\varphi(x_1, \cdots x_n) : \varphi \text{是} T \text{的完备公式}\}$.

证明 ($\Leftarrow$)设 $\theta = \bigwedge_{n<\omega} \forall x_1 \cdots x_n \bigvee \{\varphi(x_1, \cdots x_n) : \varphi \text{是} T \text{的完备公式}\}$. 若 $T \models \theta$, 任取 T 的两个可数模型 $\mathscr{U}, \mathscr{B}$, 则 $\mathscr{U} \models \theta, \mathscr{B} \models \theta$, 由定理13.2.8 (i) 知 $\mathscr{U}$, $\mathscr{B}$ 都是 T 的素模型, 由同一定理的(ii) $\mathscr{U} \cong \mathscr{B}$. 因此 T 是 ω-范畴理论。

($\Rightarrow$) 设 T 是 ω-范畴理论, 则 T 只有一个可数模型 $\mathscr{U}$, 于是 $\mathscr{U}$ 一定是 T 的素模型。由定理13.2.8 (i) 必有 $\mathscr{U} \models \theta$。设 $\mathscr{B}$ 是 T 的任意一个模型, 由 T 完备, 有 $\mathscr{U} \equiv \mathscr{B}$. 若 $\mathscr{B}$ 有限, 则由一阶逻辑已知有 $\mathscr{U} \cong \mathscr{B}$, 则 $\mathscr{B} \models \theta$。若 $\mathscr{B}$ 无限, 由 $\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$ 的降L—S—T定理, 一定有可数模型 $\mathscr{C} \prec_{\mathscr{L}_{\mathscr{A}}} \mathscr{B}$, 但 T 是 ω-范畴的, 必有 $\mathscr{U} \cong \mathscr{C}$, 因此 $\mathscr{U} \prec_{\mathscr{L}_{\mathscr{A}}} \mathscr{B}$, 从而又有 $\mathscr{B} \models \theta$, 这样 T 的每个模型都满足 θ, 从而 $T \models \theta$。 ▌

附 录 I

部分专有名词的索引

附 录 Ⅱ

部分符号的索引

命题逻辑

一阶逻辑